**МБОУ «Цивильская средняя общеобразовательная школа №1**

**им. М.В.Силантьева» Цивильского муниципиального округа**

**Чувашской Республики**

**Элективный курс**

**по математике**

**9 класс**

**Способы решения уравнений и неравенств с модулями**

**Составитель:**

**Ермеев Валерий Александрович,**

**учитель математики МБОУ «Цивильская средняя общеобразовательная школа №1**

**им. М.В. Силантьева» Цивильского**

**муниципиального округа Чувашской Республики**

**Цивильск 2025**

**Содержание:**

1. **Цели и задачи\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2**
2. **Способы решения уравнений и неравенств с модулями \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2-16**
3. **Способ 1.** Геометрическая интерпретация модуля при решении уравнений и неравенств.**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2-4**
4. **Способ 2.** Замены множителей с модулем.**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_4-8**
5. **Способ 3.** Способ последовательного раскрытия модуля.**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_8**
6. **Способ 4.** Метод схем равносильности**.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_8-9**
7. **Способ 5.** Способ возведения в квадрат.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_9-10
8. **Способ 6.** Метод интервалов.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_10-11
9. **Способ 7.** Способ специальных схем равносильности.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_11-12
10. **Способ 8.** Способ одновременного раскрытия модулей.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_13
11. **Способ 9.** Способ перебора.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_14
12. **Способ 10.** Графический.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_14-16
13. **Способ 11.** Метод введения новой переменной.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_16
14. **Вывод \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_17**
15. **Список литературы\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_17**
16. **Цели и задачи**

**Цель:** Изучение различных методов решения уравнений и неравенств с модулями.

**Задачи:**

* Найти различные методы решения уравнений и неравенств с модулями.
* Изучить найденные способы решения.
* Научиться решать уравнения и неравенства с модулями.
* Показать примеры некоторых способов решения уравнений и неравенств с модулями в презентации.

1. **Способы решения уравнений и неравенств с модулями**

**Способ 1. Геометрическая интерпретация модуля при решении уравнений и**

**неравенств.**

Геометрический смысл модуля разности величин – это расстояние между ними. Например, геометрический смысл выражения  - длина отрезка координатной оси, соединяющего точки с абсциссами  и . Перевод алгебраической задачи на геометрический язык часто позволяет избежать громоздких выкладок.

**Пример 1.** Решите уравнение 

Решение: Написанное уравнение геометрически означает, что расстояние от точки *х* до начала координат равно 3, т.е. *х* = 3 или *х* = -3.

Ответ: -3; 3.

**Пример 2.** Решите уравнение 

Решение: Число  есть расстояние между точками  и -5. Написанное уравнение геометрически означает, что расстояние от точки *х* до точки -5 равно 2.

Откладывая на числовой оси от точки -5 отрезок длиной 2 (в обе стороны), получим

*х* = -7 или *х* = -3

Ответ: -7; -3.

**Пример 3.** Решите уравнение 

Решение: Сначала делаем преобразования:  откуда 

 Написанное уравнение геометрически означает, что расстояние от точки *х* до точки  равно . Откладывая на числовой оси от точки  отрезок длиной  (в обе стороны), получим *х* = 1 или *х* = 2.

Ответ: 1; 2.

**Пример 4.** Решите уравнение 

Решение: Число  есть расстояние между точками  и 1, а число  - расстояние между точками  и -3. Написанное уравнение геометрически формулируется следующим образом: точка  находится на одинаковом расстоянии от точек 1 и -3. Иначе говоря,  - середина отрезка с концами в точках 1 и -3, т.е. 

Ответ: -1.

**Пример 5.** Решите уравнение 

Решение: Исходя из геометрической интерпретации модуля, левая часть представляет собой сумму расстояний от некоторой точки с абсциссой  до двух фиксированных точек с абсциссами 1 и 2. Тогда все точки с абсциссами из отрезка  обладают требуемым свойством, а точки, расположенные вне этого отрезка – нет.

Ответ: .

**Пример 6.** Решите уравнение 

Решение: Исходя из геометрической интерпретации модуля, получим, что разность расстояний до точек с абсциссами 1 и 2 равна единице только для точек, расположенных на координатной оси правее числа 2.

Ответ: .

Пример 7. Решите неравенство 

Решение: Написанное неравенство геометрически означает, что расстояние от точки *х* до начала координат меньше или равно 2.

Ответ: 

**Пример 8.** Решите неравенство 

Решение: Делаем преобразования:    

Написанное неравенство геометрически означает, что расстояние от точки *х* до точки  больше или равно 

Ответ: 

**Пример 9.** Решите неравенство 

Решение: Изобразим на координатной прямой точки, сумма расстояний от которых до точек -1 и 1 в точности равна 2. Это все точки отрезка  Тогда, что для всех чисел вне данного отрезка сумма расстояний будет больше двух.

Ответ: 

**Примечание:** обобщением решения вышеприведенных уравнений является следующие равносильные переходы:





**Решите уравнения и неравенства:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: 5; 15. |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |

**Способ 2. Замены множителей с модулем**

Опорная информация, позволяющая указать удобные замены, заключаются в двух основных свойствах модуля:

*  и  для всех *m,*
* а также в монотонном возрастании на множестве неотрицательных чисел функции 

Замена незнакопостоянных множителей с модулем и корнями:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |
|  | (2) |
|  | (3) |
|  | (4) |
|  | (5) |
|  | (6) |
|  | (7) |
|  | (8) |
|  | (9) |
|  | (10) |

**Пример 1.** Решите неравенство 

Решение: Воспользуемся (1):

 ****  ****

** ** **** **** **** **** **** **** **** **** **** ****

Ответ: ****

**Пример 2.** Решите неравенство 

Решение: Каждый множитель как в числителе, так и в знаменателе есть разность неотрицательных чисел. Поэтому заменяя их на разность квадратов, получим равносильное неравенство в области допустимых значений. Имеем:

 

Пользуясь свойством модуля  и раскладывая на множители разности квадратов, получим:

 

Знакопостоянные множители  и  можно заменить на единицу со знаком старшего коэффициента, т.е. на (-1) и 1 соответственно.



Ответ: 

**Пример 3.** Решите неравенство 

Решение:  

В этом неравенстве нельзя множители  и  рассматривать как разности неотрицательных величин, так как выражения  и  в ОДЗ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

при а  при 

1. При  , а 

Замена множителей: 

   т.к. 

Имеем систему:



2. При  , а 

Замена множителей: 



Имеем систему:

.

3. При  , а 

Замена множителей:  

Имеем систему: 

4. При  , а 

Замена множителей:  

Имеем систему: 

Объединяя четыре случая, получаем окончательный ответ. 

Ответ: 

**Пример 4.** Решите неравенство 

Решение: 



Ответ: 

**Пример 5.** Решите неравенство 

Решение: 

Ответ: 

**Задачи для самостоятельного решения**

**Решить неравенство:**

|  |  |
| --- | --- |
| 1.  Ответ: | 2.  Ответ: |
| 3.  Ответ: | 4.  Ответ: |
| 5.  Ответ: | 6.  Ответ: |
| 7.  Ответ: | 8.  Ответ: |
| 9.  Ответ: | 10.  Ответ: |
| 11.  Ответ | 12.  Ответ: |
| 13.  Ответ: | 14.  Ответ: |
| 15.  Ответ: | 16.  Ответ: |
| 17.  Ответ: | 18.  Ответ: |
| 19.  Ответ: | 20.  Ответ: |
| 21.  Ответ: | 22.  Ответ: |
| 23.  Ответ: | 24.  Ответ: |
| 25.  Ответ: | 26.  Ответ: |
| 27.  Ответ: |  |

**Способ 3. Способ последовательного раскрытия модуля.**

Опорная информация:

 если 

 если 

**Пример.** Решите уравнение 

Решение:   или  

  или    или  или    или или   

Ответ: .

**Решите уравнения и неравенства:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |

**Способ 4. Метод схем равносильности.**

Опорная информация:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**Пример.** Решите неравенства 

Решение:   

      

   

Ответ: 

**Решите уравнения и неравенства:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |

**Способ 5. Способ возведения в квадрат.**

Опорная информация:

1.Квадрат модуля числа равен квадрату этого числа, т.е. для всех 



2. Сравнение модулей двух чисел равносильно сравнению их квадратов, т.е.  где символ «» может быть любым из пяти символов «», «». «=», «», «», т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

3. Из равенства следует равенство 

При решении данного уравнения могут появиться лишние корни. Поэтому в решении способом возведения в квадрат, при переходе от уравнения  к уравнению  необходимо каким-либо способом отобрать лишние корни. Это возможно или путем прямой подстановки в исходное уравнение в случае получения конечного числа корней, или путем установления для получаемых решений выполнения дополнительных условий (например, выполнения условия ).

**Пример.** Решите неравенство 

Решение:

     

        

Ответ: 

**Решите уравнения и неравенства:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ответ: -1; 1. |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: 0,6; 1. |
| 1. где *а* - параметр | Ответ:  при  при |

**Способ 6. Метод интервалов.**

Опорная информация:

Значения переменной *х* разбивают область определения уравнения (неравенства) на интервалы, на каждом из которых любое выражение под знаком модуля для всех значений *х* имеет «один и тот же знак», т.е. либо всегда отрицательно, либо – положительно.

**Пример.** Решите неравенство 

Решение: Для освобождения от знаков абсолютной величины разобьем координатную ось на три области:   

** **  ****  

Ответ: 

**Решите уравнения и неравенства:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |

**Способ 7. Способ специальных схем равносильности.**

Опорная информация:

1. Числа неотрицательны тогда и тогда, когда их сумма равна сумме модулей этих чисел, т.е.

 

2. Числа неположительны тогда и тогда, когда сумма их модулей противоположны сумме этих чисел, т.е.

 

3. Числа одновременно неотрицательны или одновременно неположительны тогда и только тогда, когда сумма их модулей равна модулю их суммы, т.е.

  или 

В частности получаем

4.  

5.  

6. 

7. 

8. 

**Пример 1.** Решите неравенство 

Решение: Так как , то в силу свойства (18) равносильно неравенству 

Ответ: 

**Пример 2.** Решите уравнение 

Решение:

 

    

 

Ответ: 

**Решите уравнения и неравенства:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: 6. |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |

**Способ 8. Способ одновременного раскрытия модулей.**

Опорная информация:

При этом способе решения опорная информация совпадает с опорной информацией способом последовательного раскрытия модуля, а отличие в решении состоит в том, что неравенства для подмодульных выражений объявляется одновременно для всех модулей.

**Пример.** Решите уравнение 

Решение:  

      

Ответ: -2; 4.

**Решите уравнения и неравенства:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: 2. |
|  | Ответ: -2; 4. |
|  | Ответ: 0; 1; -1; 2; -2; 3; -3. |
|  | Ответ: 1. |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |

**Способ 9. Способ перебора.**

Опорная информация:

 или 

**Пример.** Решите уравнение 

Решение: Преобразуем данное уравнение, используя свойство модуля 



Случай 1. (+;+):    

Проверка: *х* = 2: 

0 = 0 – верное равенство, значит, *х* = 2 –корень уравнения.

*x* = 3: 

0 = 0 – верное равенство, значит, *х* = 3 –корень уравнения.

Случай 2. (+;-): 0*х* = 0, 



Случай 3. (-;+): -

Проверка: 

1,92 = 0 - неверное равенство, значит, *х* = 1,4 –не является корнем уравнения.

Случай 4. (-;-): -    

Проверка: *х* = 1: 

4 = 0 – неверное равенство, значит, *х* = 1 – не является корнем уравнения.

*x* = -1: 

24 = 0 – неверное равенство, значит, *х* = -1 – не является корнем уравнения.

Ответ: 

**Решите уравнения:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: -1. |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: 2. |
|  | Ответ: -2; 4. |
|  | Ответ: 0; 1; -1; 2; -2; 3; -3. |
|  | Ответ: 1. |

**Способ 10. Графический.**

**Пример 1.** Сколько решений в зависимости от параметра *а* имеет уравнение 

Решение: Перепишем уравнение в виде 

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Введём две функции: у =  2. Построим в одной системе координат графики функций  На основании рисунка получаем  при *а* < -1 уравнение не имеет корней;  при *а* = - 1 уравнение имеет одно решение;  при *а* > -1 уравнение имеет два корня.  Ответ: при *а* < -1 уравнение не имеет корней;  при *а* = - 1 уравнение имеет одно решение;  при *а* > -1 уравнение имеет два корня. |  |

**Пример 2**. Найдите все значения *а*, при каждом из которых уравнение  имеет ровно 3 корня.

Решение:

Уравнение  на основании определения модуля можно заменить равносильной ему совокупностью уравнений, т.е.



Уравнение имеет ровно 3 корня тогда и только тогда, когда выполняется условие  т.е. *а* = -1.

Задачу можно решить графически.

|  |  |
| --- | --- |
| Построим графики:  Уравнение имеет ровно 3 корня тогда и только тогда, когда прямая  пересекает график  в двух точках, а прямая  в одной точке. (Т.к.  при любом a.)  Ответ: *а* = -1. | C:\Documents and Settings\Ермеев\Local Settings\Temporary Internet Files\Content.Word\Новый рисунок (1).png  y = -1 - *a*  y = |x|  y = 11 - *a* |

**Решите уравнения и неравенства:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: -1; 3. |
|  | Ответ: 0. |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: -2; 4. |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: 5. |
| 1. . | Ответ: |

14. Найдите все значения *а*, при каждом из которых уравнение  имеет ровно 3 корня.

Ответ: -1.

15. Сколько решений в зависимости от параметра *а* имеет уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

16. Найти все значения параметра *а*, при которых уравнение  имеет ровно два корня.

Ответ: 

17. При каких значениях параметра *а* уравнение  имеет хотя бы одно решение?

Ответ: 

**Способ 11. Метод введения новой переменной.**

**Пример**. Решите уравнение 

Решение: Так как уравнение можно переписать в виде 

Введем новую неизвестную  получим уравнение  Квадратное уравнение имеет два корня   Значит, исходное уравнение распадается на два уравнения:

 

Объединяя множества решений этих уравнений, получим ответ.

Ответ: 

**Решите уравнения и неравенства:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: 0; 2. |
|  | Ответ: |
|  | Ответ: |

1. **Вывод:**

**Цели и задачи проекта достигнуты.**

**В ходе работы я изучил различные способы решений уравнений и неравенств с модулями, научился применять их на практике и показал примеры решений некоторых способов.**

1. **Источники:**

[**https://infourok.ru/prezentaciya-uravneniya-i-neravenstva-s-modulem-599622.html**](https://infourok.ru/prezentaciya-uravneniya-i-neravenstva-s-modulem-599622.html)