МБОУ «Гимназия № 25»

Нестандартные способы решения квадратных уравнений

Выполнил Байбарин Фёдор, 9 Г

Руководитель Учитель математики Жиленкова Н. Н.

г. Курск

2025

Оглавление

Введение

Изучение квадратных уравнений — это важный этап в освоении алгебры в средней школе. Этот материал обычно изучается в 8 классе и становится одним из ключевых моментов курса математики. Учащиеся знакомятся с определением квадратного уравнения, его стандартным видом $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$

Квадратные уравнения находят широкое применение как в реальной жизни, так и в разных областях профессиональной деятельности.

Физика и техника

Квадратные уравнения используются для моделирования движения тел по параболической траектории, например, при расчёте полёта мяча, снаряда или любого объекта, брошенного под углом к горизонту. Также они применяются при анализе гармонических колебаний, расчёте сопротивления в электрических цепях и при проектировании параболических зеркал и антенн.

Строительство и архитектура

При проектировании зданий, мостов, фонтанов и других сооружений квадратные уравнения помогают рассчитывать оптимальные размеры, нагрузки и распределение материалов.

Финансы и экономика

Квадратные уравнения применяются для расчёта точек безубыточности, определения прибыли, анализа рыночного спроса, а также при прогнозировании доходности инвестиций и расчёте кредитных платежей.

Экология и биология

С их помощью моделируют распространение загрязняющих веществ, рассчитывают концентрацию веществ в определённых условиях и анализируют динамику популяций.

Пример из жизни

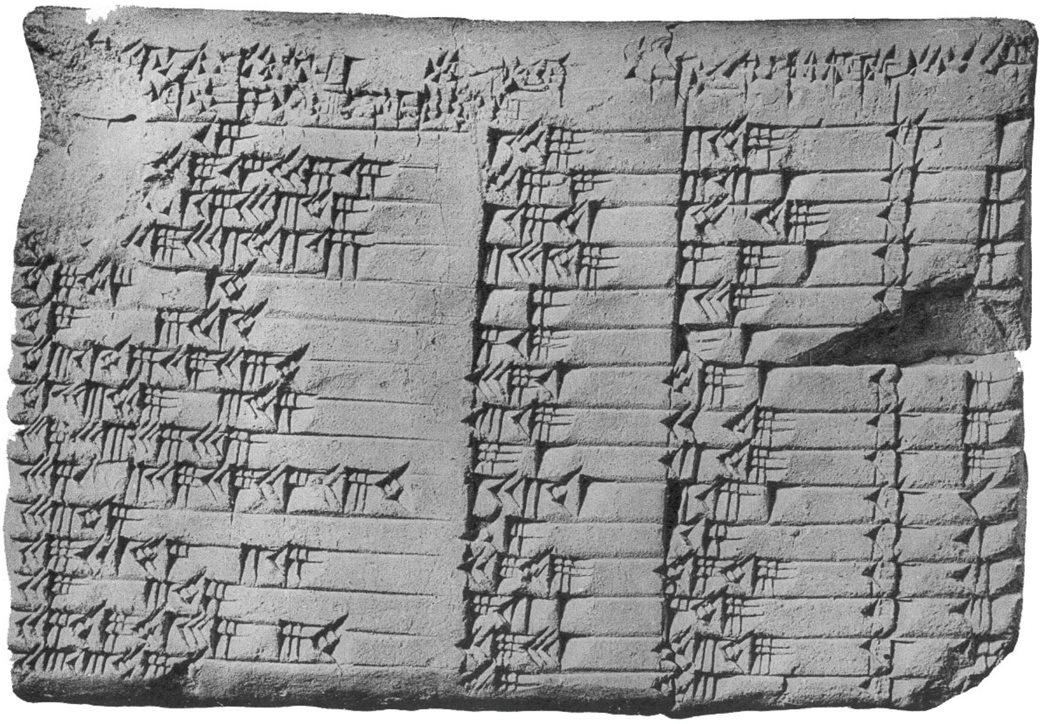
Если требуется огородить участок земли прямоугольной формы, где длина на 10 метров больше ширины, а площадь участка известна, задача сводится к решению квадратного уравнения для определения размеров участка.

При этом, основным способом решения квадратных уравнений является использование формулы дискриминанта. Но особый интерес представляют нестандартные способы решения, как достаточно "старые", так и относительно современные.

Исторический обзор

Вавилонские глиняные таблички

Квадратные уравнения впервые появились в Древнем Вавилоне около 2000 года до н. э.

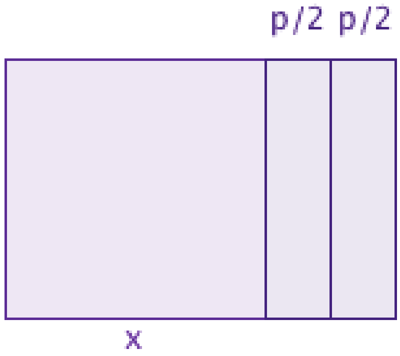


Глиняная табличка Плимптон 322 с числами, написанными клинописью

Рассмотрим пример из клинописных текстов: $x^2 - x = 870$

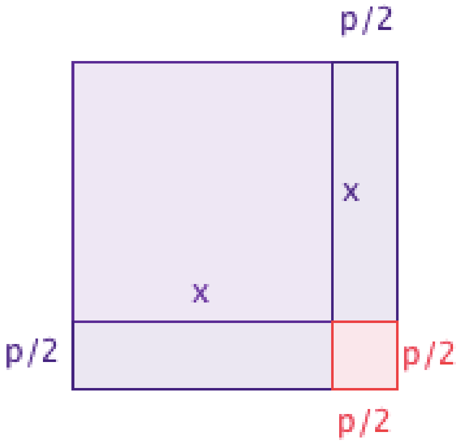
Вавилоняне использовали геометрическую интерпретацию как метод решения.

1. Представляли поле как квадрат со стороной x.



Шаг 1. Геометрическая интерпретация решения квадратных уравнений в Древнем Вавилоне

1. Коэффициент при x делится пополам: $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Дополняли фигуру до полного квадрата, добавляя квадрат со стороной 0,5.



Шаг 2. Геометрическая интерпретация решения квадратных уравнений в Древнем Вавилоне

1. Возведение половины коэффициента в квадрат: $0,5^2 = 0.25$.
2. Добавление результата к обеим частям уравнения:

$$x^2 - x + 0{,}25 = 870 + 0{,}25 \rightarrow x^2 - x + 0{,}25 = 870{,}25$$

3. Преобразование левой части в полный квадрат:

$$(x - 0{,}5)^2 = 870{,}25$$

4. Извлечение квадратного корня (отрицательный корень игнорировался):

$$x - 0{,}5 = \sqrt{870{,}25} = 29{,}5$$

5. Нахождение x:

$$x = 29{,}5 + 0{,}5 = 30$$

6. Проверка:

   Подстановка $x = 30$ в исходное уравнение:

$$30^2 - 30 = 900 - 30 = 870$$

Особенности вавилонского метода:

- Отсутствие общей формулы. Алгоритм применялся к конкретным числовым примерам без теоретического обоснования
- Игнорирование отрицательных корней. Решения выбирались только положительные, так как отрицательные числа не использовались
- Геометрическая интерпретация. Уравнения часто сводились к задачам о площадях и сторонах фигур

Ал-Хорезми и "ал-джебр"

В IX веке персидский математик Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми в трактате «Китаб аль-джебр ва-ль-мукабала» (Книга о восстановлении и противопоставлении) впервые классифицировал квадратные уравнения.

Он выделил шесть типов уравнений, включая:

1. Квадраты равны корням

$$x^2 = bx$$

2. Квадраты и корни равны числу

$$x^2 + bx = c$$

При решении он использовал словесные описания и геометрические построения. Далее приведён один из примеров решения из трактата.

Уравнение $x^2 + 10x = 39$ *решается так:*

1. *Раздели коэффициент при x пополам:* $\frac{10}{2} = 5$
2. *Построй квадрат со стороной 5: площадь 25.*
3. *Добавь это к обеим частям:* $x^2 + 10x + 25 = 64$.
4. *Извлеки корень:* $x + 5 = 8 \Rightarrow x = 3$.

Ал-Хорезми не использовал отрицательные корни, но его работа заложила основы алгебры. Термин «ал-джебр» (восстановление) дал название целой области математики.

Средневековая Европа: от геометрии к символам

В XII веке переводы трудов ал-Хорезми на латынь популяризировали алгебру в Европе. Итальянский математик Леонардо Фибоначчи в «Книге абака» (1202 г.) адаптировал методы для коммерческих расчётов. Однако до XVI века уравнения записывались словами, а не символами.

Прорыв произошёл в 1545 году, когда Джероламо Кардано опубликовал формулу решения кубических уравнений, что стимулировало развитие символической алгебры.

$$y^3 + py + q = 0$$

Кардано не приписывал алгоритм себе и честно сообщил в книге, что авторами являются Сципион дель Ферро и Тарталья, тем не менее, алгоритм ныне известен под незаслуженным названием "формула Кардано".

Никколо́ Тарта́лья (итал. Niccolò Tartaglia, 1499—1557) — итальянский математик-самоучка, педагог, инженер фортификационных сооружений

Алгебраические методы

Метод выделения полного квадрата

Этот метод основан на преобразовании квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ в форму $a(x - x_0)^2 + y_0$, что упрощает нахождение корней.

Алгоритм

1. Перенести свободный член в правую часть:

$$x^2 + 6x = -5$$

2. Выделите коэффициент при x, разделите его на 2 и возведите в квадрат:

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$$

3. Добавьте и вычтите полученное число:

$$x^2 + 6x + 9 - 9 = -5 \rightarrow (x + 3)^2 = 4$$

4. Решите уравнение:

$$x + 3 = \pm 2 \rightarrow x = -1 \text{или} x = -5$$

Исходное уравнение → Выделение квадрата → Решение

$x^2 + 6x + 5 = 0$ → $(x+3)^2 = 4$ → $x = -1$, $x = -5$

Разложение на множители

Квадратный трёхчлен можно разложить на линейные множители, если известны его корни:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Но поскольку нашей целью является нахождение корней квадратного уравнения, то данная формулировка в некоторой степени бесполезна. Если нам известно разложение квадратного трёхчлена на множители, то тогда мы соответственно знаем корни уравнения.

Важным дополнением является использование теоремы Виета для разложения трёхчлена на множители, используя подбор значений.

Теорема Виета устанавливает связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, что позволяет быстро разложить квадратный трёхчлен на множители.

Формулировка теоремы Виета

Для уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$:

- Сумма корней: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- Произведение корней: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Процесс разложения на множители с помощью теоремы Виета:

1. Найдите сумму и произведение корней по теореме Виета:
   - Для приведённого уравнения $(a = 1)$: $x_1 + x_2 = -b, x_1 \cdot x_2 = c$.
   - Для общего случая $(a \neq 1)$ используйте формулы выше.
2. Подберите корни x_1 и x_2, которые удовлетворяют этим условиям. Обычно это делается подбором или через формулу корней.
3. Запишите разложение:
   - Для приведённого трёхчлена $(a = 1)$: $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$
   - Для общего случая: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Пример

Рассмотрим уравнение: $x^2 - 5x + 6 = 0$

- $x_1 + x_2 = 5$
- $x_1 \cdot x_2 = 6$

Подбираем числа: 2 и 3.

Разложение: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Таким образом, теорема Виета позволяет быстро найти корни и записать разложение квадратного трёхчлена на множители, используя только коэффициенты уравнения.

Метод "переброски" старшего коэффициента

Метод заключается в преобразовании уравнения путём умножения обеих частей на старший коэффициент и замены переменной.

Уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$ преобразуется в $4x^2 - 22x + 30 = 0$.

Подставляем $y = 2x$, получаем $y^2 - 11y + 30 = 0$.

Решаем это уравнение и возвращаемся к переменной x.

Альтернативная формула корней

Домножив числитель и знаменатель стандартной формулы корней квадратного уравнения на выражение $b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$, получим $x_{1,2} = -\frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}$. Данная нестандартная формула интересна тем, что, в отличие от стандартной, она применима и в случае невырожденного линейного уравнения, т. е. при $a = 0 и b = 0$. В этом случае одно из значений будет равняться $x = -\frac{c}{b}$, а второе значение не будет иметь смысла, так как будет содержать деление на ноль. Однако при $c = 0$ нестандартная формула позволяет получить только один из двух корней уравнения, а именно $x = 0$, а при нахождении второго корня возникает неопределённость $\frac{0}{0}$. Если же $b = c = 0$, то нестандартная формула даёт неопределённость при вычислении обоих корней.

Устраняет эти недостатки смешанная формула $x_1 = -\frac{2c}{b+\varepsilon\sqrt{b^2-4ac}}, x_2 = -\frac{b+\varepsilon\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, где $\varepsilon = 1 при b \geq 0 и \varepsilon = -1 при b < 0$. Множество всех допустимых значений этой формулы совпадает со множеством корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при условии, что уравнение содержит переменную x, т. е. $a^2 + b^2 \neq 0$.

Применение свойство коэффициентов

Если коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $a + \varepsilon b + c = 0$, где $\varepsilon = \pm 1$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = \varepsilon и x_2 = \frac{\varepsilon c}{a}$.

Это свойство можно доказать, используя теорему Виета.

Пример. $24 \cdot x^2 - 37x + 13 = 0$. Так как $24 - 37 + 13 = 0$, то $x_1 = 1, x_2 = \frac{13}{24}$.

Метод Султанова

Этот нестандартный подход основан на подборе корней через делители свободного члена и использование связи между коэффициентами уравнения. Он особенно эффективен для уравнений с "удобными" целыми корнями.

Алгоритм решения

1. Приведение уравнения к виду: $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Деление уравнения на $x(\text{при} x \neq 0)$: $ax + b + \frac{c}{x} = 0$.
3. Перенос свободного члена: $ax + b = -\frac{c}{x}$.
4. Поиск делителей свободного члена - проверяем делители c (включая отрицательные) как возможные корни уравнения.
5. Определение второго корня - если найден корень x_1, второй корень вычисляется по формуле: $x_2 = \frac{c}{x_1 \cdot a}$.

Пример. Уравнение $4x^2 + 35x - 9 = 0$

Делим на x

$$4x + 35 = \frac{9}{x}$$

Перебираем делители свободного члена $c = -9$: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$.

Проверяем $x = -9$. Подставляем в исходное уравнение:

$$4(-9)^2 + 35(-9) - 9 = 324 - 315 - 9 = 0$$

Корень $x_1 = -9$.

Находим x_2: $x_2 = -\frac{9}{(-9)\cdot 4} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $x = -9, x = \frac{1}{4}$.

Особенности метода

- Эффективность: работает для уравнений, где свободный член c имеет небольшое количество делителей.
- Связь с теоремой Виета: этот метод использует принцип $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, аналогичный теореме Виета.
- Ограничения: неприменим, если $c = 0$ или корни не являются делителями c.

Графические методы решения

Геометрический способ решения квадратных уравнений

В древности геометрия была более развита, чем алгебра, и квадратные уравнения решали тоже геометрически.

6,25	**2,5 x**	**6,25**
2,5 x	**x^2**	**2,5 x**
6,25	**2,5 x**	**6,25**

Геометрический метод

Возьмём пример из "Алгебры" Ал-Хорезми: $x^2 + 10x = 39$. В оригинале эта задача формулируется следующим образом: "Квадрат и десять корней равны 39".

На сторонах квадрата со стороной x строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна 2,5. Площадь каждого прямоугольника равна $2{,}5x$. Полученную фигуру дополняют до нового квадрата, достраивая в углах четыре равных квадрата, сторона каждого из них равна 2,5, а площадь $6{,}25$.

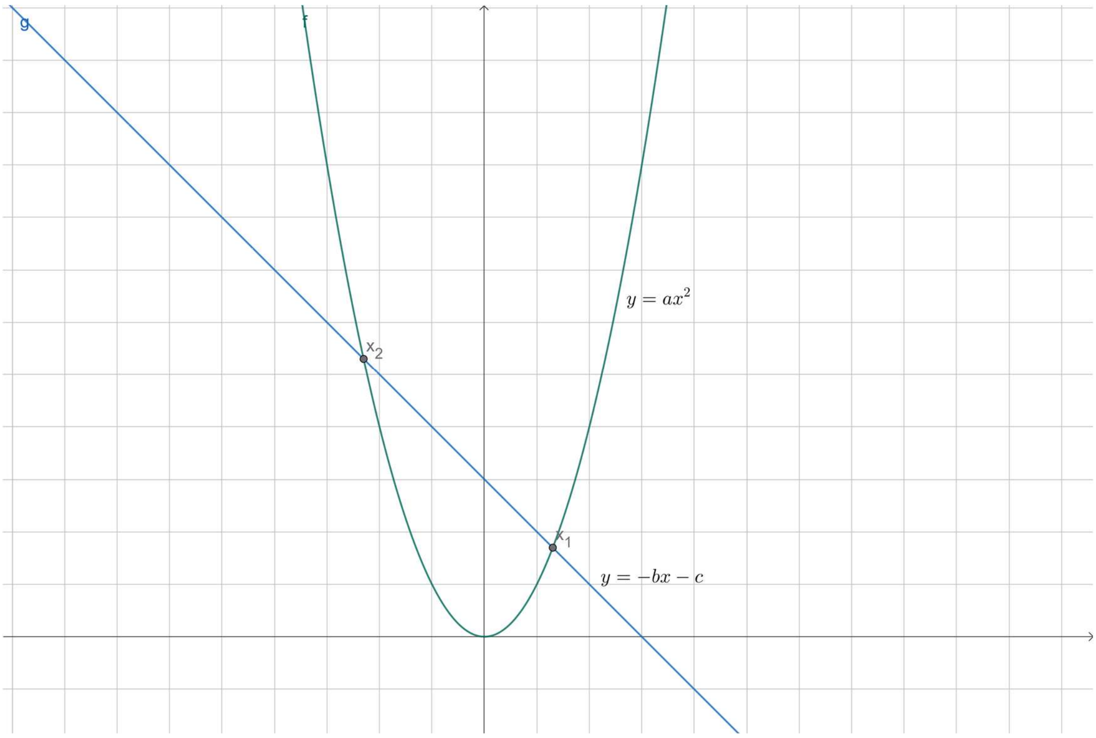
Площадь квадрата S можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата x^2, четырёх прямоугольников $4 \cdot 2{,}5x = 10x$, четырёх пристроенных квадратов $6{,}25 \cdot 4 = 25$. Таким образом, $S = x^2 + 10x + 25$. Заменяя $x^2 + 10x$ числом 39, получим $S = 39 + 25 = 64$, откуда следует, что сторона квадрата равна 8. Для искомой стороны первоначального квадрата получим $x = 8 - 2{,}5 \cdot 2 = 3$ (см. рис.).

Отметим, что подобным образом можно находить положительные корни уравнений вида $x^2 \pm px = q$, где $p и q$ — положительные числа. Например, для решения уравнения $x^2 - 4x = 12$ необходимо внутри квадрата со стороной x построить четыре прямоугольника размерами $x \times 1$, на пересечении которых образуется четыре квадрата 1 × 1. Тогда площадь внутреннего квадрата $S = x^2 - 4x + 4 = 12 + 4 = 16$. Следовательно, $x = 4 + 2 = 6$.

Графический метод решения квадратных уравнений

Решим графически уравнение $ax^2 + bx + c = 0, где a \neq 0$. Оно равносильно уравнению $ax^2 = -(bx + c)$. Построим графики функций $y = ax^2 и y = -(bx + c)$ в одной системе координат.

График первой функции — парабола, проходящая через начало координат. График второй функции — прямая. В точках $x_1 и x_2$ значения обеих функций равны. Следовательно, $x_1 и x_2$ являются корнями уравнения.



Графический метод

При применении этого метода возможны следующие случаи:

1. Прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения.
2. Прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т. е. уравнение имеет одно решение.
3. Прямая и парабола не имеют общих точек, т. е. квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ можно решить графически иначе, построив параболу $y = ax^2 + bx + c$ и найдя точки её пересечения с осью абсцисс.

Применяя графический метод не всегда можно найти точное значение корней. Поэтому этот метод часто применяют не для нахождения корней уравнения, а для определения их количества или каких-либо свойств.

Решение с помощью номограммы

Номогра́мма (от др.-греч. νόμος — закон и γράμμα — письмо) — графическое представление функции от нескольких переменных, позволяющее с помощью простых геометрических операций (например, прикладывания линейки) исследовать функциональные зависимости без вычислений.

Широкое распространение калькуляторов (как отдельных вычислительных устройств) в конце XX века и приложений для вычислений, доступных на персональных компьютерах и смартфонах в XXI, практически уничтожили другие способы выполнения вычислений - будь то логарифмическая линейка или таблицы Брадиса.

Но и сейчас можно использовать способ решения квадратных уравнений, помещённый в таблицы Брадиса под названием "Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$". Эта номограмма позволяет, не решая квадратное уравнение, определить его корни по значениям коэффициентов.

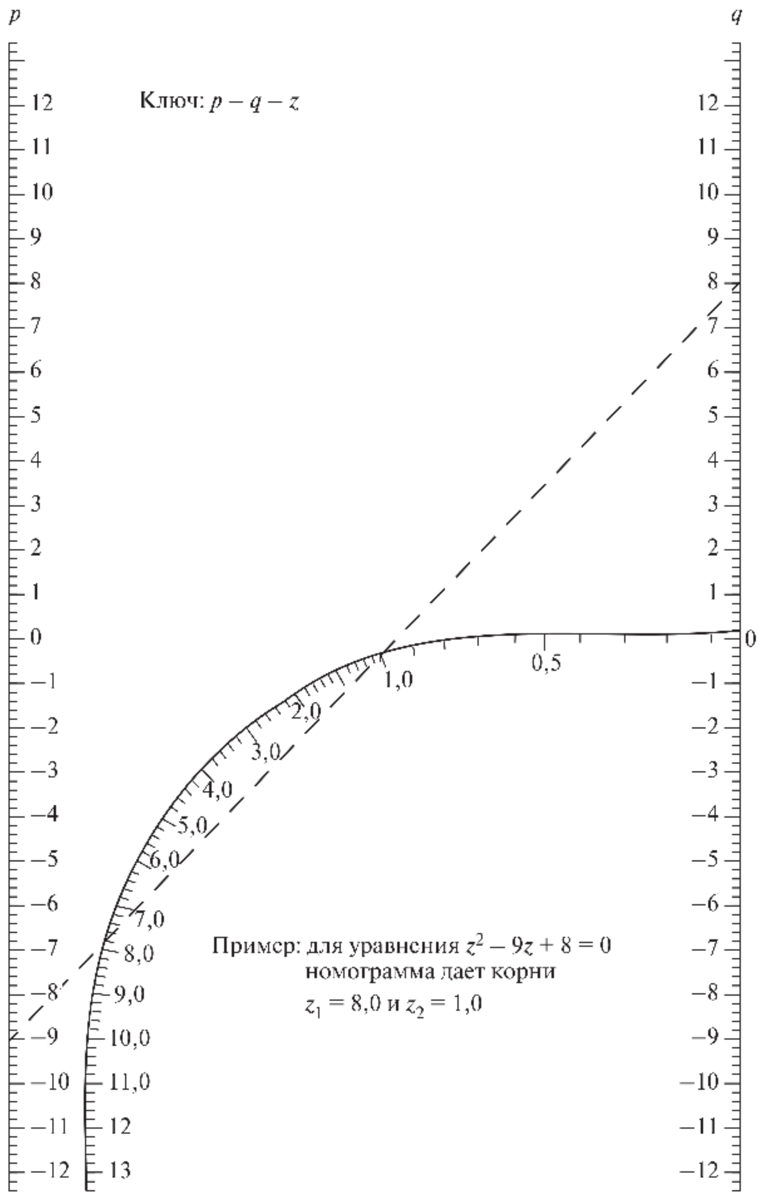


Таблица XXII из сборника Брадиса

Прямая, построенная по значениям piq и кривая могут:

- пересекаться в двух точках: оба корня уравнения положительны;
- пересекаться в одной точке: корни уравнения имеют разные знаки;
- касаться: уравнение имеет кратный положительный корень;
- не иметь ни одной общей точки: либо оба корня уравнения отрицательны, либо у него вообще нет действительных корней.

Номограмма даёт положительные значения корней. Для получения отрицательных корней уравнения $z^2 + pz + q = 0$ надо, сделав замену переменной $z = -t$, искать на той же номограмме положительные корни для уравнения $t^2 - pt + q = 0$. Если коэффициенты $p и q$ выходят на пределы шкал, то выполняют подстановку $z = kt$.

Примеры

1. Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ номограмма даёт корни $z_1 = 8 и z_2 = 1$.
2. Уравнение $2z^2 - 9z + 4 = 0$. Разделив коэффициенты уравнения на 2, получим $z^2 - 4{,}5z + 2 = 0$. Номограмма даёт корни $z_1 = 4 и z_2 = 0{,}5$.
3. Уравнение $z^2 + 9z + 8 = 0$. Делаем замену $z = -t$. Корни уравнения $t^2 - 9t + 8 = 0$ находим по номограмме: $t_1 = 8, t_2 = 1$. Значит, $z_1 = -8, z_2 = -1$.
4. Уравнение $z^2 - 18z + 32 = 0$. Подстановка $z = 4t$ приводит к уравнению $16t^2 - 72t + 32 = 0$. Сокращая на 16, получим $t^2 - 4{,}5t + 2 = 0$. Номограмма даёт корни $t_1 = 4, t_2 = 0{,}5$. Значит, $z_1 = 16, z_2 = 2$.

Список литературы

1. Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы. М., Дрофа, 2001.
2. *https://web.archive.org/web/20170610002618/http://algolist.manual.ru/maths/findroot/cubic.php*
3. Алексеев В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях — М.: МЦНМО, 2001. — 192 с. 115 ил. ISBN 5–900916–86–3
4. *https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%BE* [Формула Кардано — Википедия]
5. Шаталова С. Способы решения квадратных уравнений // "Математика в школе"№42. 2004.
6. Illustrating the Quadratic Formula with Al-Khwarizmi’s Algebra Historical Aspects of Classroom Mathematics