Теория вероятностей прошла сложный путь, прежде чем обрела современную форму. С неверным пониманием некоторых задач этой области сталкивались не только рядовые обыватели, но и именитые учёные – математики.

В 1959 году Мартин Гарднер опубликовал в журнале статью под названием «Парадокс второго ребёнка», где сформулировал задачу так:

1) «У мистера Джонса двое детей и старший из них – девочка. Какова вероятность того, что оба ребёнка – девочки?»

2) «У мистера Смитта двое детей и хотя бы один из них – мальчик. Какова вероятность того, что оба ребёнка – мальчики?»

Изначально сам Гарднер давал ответ «1/2» на первый вопрос и «1/3» на второй, но впоследствии понял неоднозначность ситуации во втором случае. Ответ на этот вопрос может измениться в зависимости от того, как было выяснено, что один из детей – мальчик.

Парадокс заключается в том, что при различном подходе и конкретизации условия вероятность события различна. Очевидный ответ «1/2» на оба вопроса возникает лишь в том случае, когда из каждого условия следует, что есть два равновероятных исхода и что вероятности этих исходов безусловны.

Однако, даже в случае конкретизации условий некоторые вероятностные задачи могут иметь неочевидное решение, которые не будут являться парадоксом с точки зрения теории вероятностей.

Такой является задача, рассмотренная Рихардом Мизесом в 1939 году.

«В группе, состоящей из 23-х и более человек, вероятность совпадения дня и месяца рождения превышает 50%. А для группы более 55 человек вероятность такого совпадения приближается к 99%»

Это утверждение может показаться неочевидным, так как вероятность совпадения дня и месяца рождения двух человек равна 1/365. Умноженная на 23, количество человек в группе, такая вероятность будет равна лишь 6,3%. Однако, такое интуитивное решение ошибочно, количество возможных пар равно: $\frac{23!}{2!\left(23-2\right)!}=\frac{22\*23}{2}=253$, что значительно превышает количество человек в группе.

Есть ещё один пример того, как на выработку решения задачи, связанной с вероятностями ушли века.

В 1492 году, итальянский математик Лука Пачоли описал задачу о разделении ставки при незавершенной игре, которую он предложил решить на основе полученных баллов. Вскоре стало ясно, что это решение было неправильным, потому что оно исключает возможность вознаграждения того, кто не заработал ни одного балла, хотя у него все еще есть небольшой шанс на победу.

Эта задача захватила многие умы на протяжении веков, и только в середине XVII в. Блез Паскаль и Пьер де Ферма пришили к верному решению данной задачи, пропорциональному шансам на возможную победу в случае продолжения игры для каждого игрока.

Эти немногие исторические примеры иллюстрируют принципиальную разницу между логикой бытовой, основанной на жизненном опыте конкретного человека, и принципами теории вероятностей.

Так же из данных примеров следует, что не стоит сразу ожидать от школьников глубокого понимания принципов теории вероятностей после простого изложения материала. Даже на самом элементарном уровне, овладение инструментом теория вероятностей требует специально коррелированной работы.

На примерах выше было показано, что теория вероятностей не является интуитивной без наличия соответствующих знаний и опыта. В их отсутствии в силу вступают приёмы человеческой психики, упрощающие решение задач путём сужения области поиска.

Данные приёмы формируются на основе личного опыта, и, в отличие от логических рассуждений, не всегда приводят к правильному решению.

Ярким примером тому служит ошибка конъюнкции – придание большей правдоподобности совместным событиям, чем событиям по отдельности.

В пример такого искажения в совместной работе Амоса Тверски и Даниэля Каннемана [5, с. 23] сформулирована «проблема Линды»:

«Линде 31 год, она не замужем, за словом в карман не лезет и очень сообразительная. Она училась на факультете философии. Студенткой много размышляла о дискриминации и социальной несправедливости, участвовала в демонстрациях против распространения ядерного оружия.

Вопрос: что более вероятно?

1) Линда – кассир в банке.

2) Линда – кассир в банке и активная феминистка.»

Несмотря на то, что при строгом рассуждении, вероятность совпадения двух событий не может превышать вероятность только одного из этих событий, большинство опрашиваемых выбирали второй вариант ответа.

В формировании этой ошибки участвуют различные факторы, не в последнюю очередь и так называемая ошибка репрезентативности.

Данная когнитивная ошибка вынуждает нас сделать выбор в пользу соответствия некоему шаблону и даже игнорировать не соответствующую этому шаблону объективную информацию.

Выходит, анализируя описание личности Линды, наш мозг выдаёт подходящий шаблон, которому она должна соответствовать. Согласно же этому шаблону Линда наверняка феминистка.

В группе опрошенных мною учащихся, которым предстоит изучать предмет «Вероятность и статистика» в следующем учебном году, подавляющее большинство так же посчитали более вероятным второй вариант.

Учащиеся аргументировали свой выбор тем, что личностные характеристики Линды никак указывают на работу в банке, игнорируя при этом наличие того же условия и во втором, более вероятном, по их мнению, варианте решения.

Точно так же люди игнорируют объективные данные об относительной частоте некоторого рассматриваемого явления.

Например, статистически для человека более вероятно пострадать при дорожно – транспортном происшествии, чем во время авиаперелёта. Тем не менее, на оценку риска авиаперелёта конкретным человеком, эта информация никак не влияет.

Помимо ошибки репрезентативности, в формировании данного заблуждения участвует и другой фактор.

Даже научное понимание может выходить за рамки одной лишь частотной вероятности, существуют также физическая, логическая, байесовская, и другие. Чаще всего на вероятность смотрят как на объективное свойство событий и явлений окружающего мира, но можно взглянуть и с другой стороны – как на субъективное её восприятие человеком. Бытовое понимание термина вероятности события так же может быть неконкретно, и изменяться в зависимости от ситуации.

Эмиль Борель писал, что среди тех событий, которые мы характеризуем как маловероятные, достаточно вероятные или очень вероятные, можно выделить три категории:

1) те, которые относятся к нашему собственному поведению;

2) те, которые относятся к поведению других людей,

3) и те, которые относятся к природным явлениям[6, с.13].

Так же он обратил внимание на неопределённость границ этих категорий, что усложняет оценку вероятности конкретного явления. При этом автор подчёркивал субъективный характер данной оценки вероятности в повседневном смысле.

Например, оба участника некоторой игры могут быть уверены, что их шансы на победу выше, чем у соперника. В действительности же, такого случиться не может.

У каждого человека подобное несоответствие в оценке вероятностей исходит из возможности для уникальности объема опыта и знаний, и противоречивости оценок [7]. Бытовая субъективность в оценке вероятностей создаёт некоторые парадоксы.

Необходимость оценки вероятности некоторых событий встречается во всех областях деятельности человека. Для этого требуется обладать определёнными приёмами вероятностного мышления.

Подобные задачи может решать врач, оценивая пользу и риски для пациента от применения некоторого лекарства, или оценивая вероятность наличия у человека определённого заболевания. Ту же задачу, незаметно для себя, решает водитель, оценивая риски перед манёвром. Эти бытовые задачи привычны нашему разуму и не требуют конкретизации.

Большинство людей, сталкиваясь с нестандартно сформулированными задачами, совершают логические ошибки, характерные для бытового мышления, с его заблуждениями и искажениями.

Данные ошибки можно преодолеть только с помощью внедрения адекватных научных представлений, знакомства человека с приёмами математической логики.

Как показывает практика, в массовом порядке овладение данными приёмами не происходит. Следовательно, изучение теории вероятностей в рамках школьного предмета алгебры не даёт высоких результатов. Данную проблему мог бы решить отдельный предметный курс о теории вероятностей и статистике.

Почти в каждой предметной области есть забавные загадки - парадоксы, решение которых противоречит интуиции на первый взгляд.

Кроме средства скрашивания свободного времени такие задачи своего рода индикатор, который помогает в обнаружении и локализации проблемы неполного и искаженного понимания предмета, подвигнуть человека критиковать свои представления.

Например, загадка о сыновьях математика:

«Встретились два математика, которые давно не виделись.

– Сколько у тебя детей?

– Трое.

– А сколько им лет?

– Если перемножить их возраст – получится 36.

– Не могу дать ответ, мало информации.

– Если сложить их возраста – номер твоего дома.

– Мне этих данных недостаточно.

Второй математик немного подумал и сказал:

– Старший сын – рыжий.

После чего был назван ответ.

Вопрос: сколько лет детям?»

Если на первых двух этапах у учащихся средней школы не возникает больших трудностей, так как они заключаются лишь в переборе подходящих вариантов, то с третьим этапом всё немного сложнее.

Так как цвет волос не может быть связан с возрастом ребёнка, возникает трудность в выборе одного из двух оставшихся вариантов. При этом информация о цвете кажется более важной, а приблизительная информация о возрасте (старший) – игнорируется.

В теории вероятностей особенно часто встречаются именно такие задачи – содержание которых перестаёт согласовываться с бытовой интуицией.

Например, следующая задача была представлена на Едином Государственном Экзамене по математике для учащихся, получивших полное среднее образование в школе. Данная задача входила в основную часть экзамена, не требующую приводить полное решение.

«В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра.

Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25.

Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе».

Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.»

При знакомстве с подобными задачами в рамках школьного курса алгебры, у учащихся возникала трудность понимания принципа оценки вероятности в последнем случае.

Им казалось интуитивно неправильным, что для ситуации, когда речь идёт о двух кофейных автоматах сразу, оценка вероятности получилась ниже, чем в случае, когда говорилось только об одном из них.

Тем не менее, строгим рассуждением можно прийти к выводу, что неисправность двух кофейных автоматов одновременно действительно должна быть менее вероятным событием, чем в случае, если проблема возникнет только с одним.

Если при ознакомлении учащихся с основами теории вероятностей данные противоречия останутся неразрешенными, могут сложиться неверные представления о вероятностной природе событий и принципах самой теории вероятностей.

В учебном пособии «Теория вероятностей и статистика»[8] большее внимание уделяется именно таким задачам, во время решения которых у учащихся вырабатывается навык применения вероятностных моделей.

И, напротив, авторы не рекомендуют фиксироваться на задачах – парадоксах, так как на начальном этапе обучения они в большей степени отвлекают и путают учащихся, чем помогают разобраться в принципах самой теории вероятностей.

Тем не менее, следует заметить, что элементы теории вероятностей и статистики в школьном курсе чаще связываются именно с такими задачами.

Неоспоримым достоинством использования нестандартных уроков и решения задач – парадоксов в процессе изучения вероятностно – статистической линии является формирование познавательного интереса к данному предмету.

Так же следует отметить, что несмотря на обозначенные выше трудности, именно через столкновение учащихся с противоречиями их собственных представлений и объективных законов теории вероятностей, можно добиться более глубокого понимания вероятностных моделей.