**МЕТОДЫ И ПРИЁМЫ РЕШЕНИЯ**

**НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ**

**В НАЧАЛЬНЫХ КЛАССАХ**

Моделирование в поиске разных способов  
решения задач

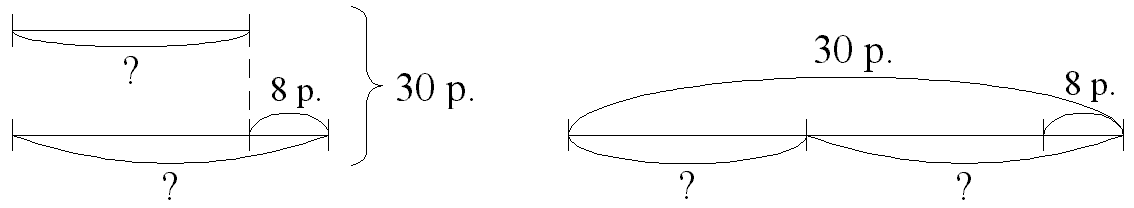
В современной начальной школе при обучении младших школьников решению задач широкое распространение получает графическое моделирование. На примере задач из старинных учебников покажем эффективность приема графического моделирования – построение схемы к тексту задачи и преобразование её для поиска пути решения задачи.

Покажем возможности графического моделирования при обучении учащихся 3-го или 4-го класса приему «уравнивания», обеспечивающему поиск решения задач разными арифметическими способами.

Начнем с приема уравнивания. Он эффективен при решении задач, в которых речь идет о известном целом, состоящем из нескольких неравных частей и указывается «разница» между частями. Для создания условий самостоятельному «открытию» учениками приема преобразования модели и применения его в изменяющихся условиях важен подбор постепенно усложняющихся задач с таким сюжетом, который, будучи основанным на жизненном опыте детей, «подсказывал» бы им решение. Для примера возьмем задачу «на дележ денег».

*Задача 1.* У брата и сестры вместе 30 рублей. Сколько денег у каждого, если у брата на 8 рублей больше, чем у сестры?

К таким задачам возможны два варианта модели. Обсудив с детьми преимущества и недостатки каждой из них для дальнейшей работы над такими задачами лучше выбрать первую модель-схему.



Чтобы подвести учеников к выбору более удобной для показа решения модели и помочь им «выйти» на один из возможных способов решения задачи о разделе денег между братом и сестрой, можно предложить вспомогательную задачу: «У тебя в двух карманах лежат деньги, причем, в одном из них – на 10 рублей больше, чем в другом. Что нужно сделать, чтобы денег в карманах стало поровну?».

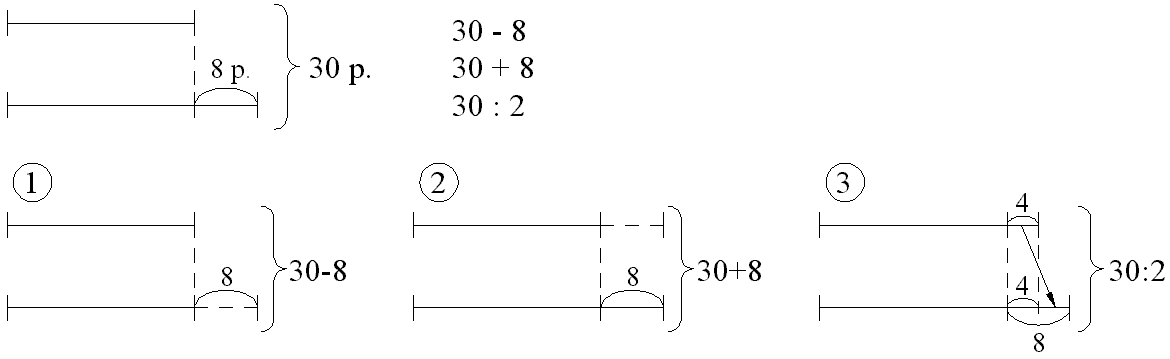
– Покажите на схеме, как были разложены деньги. Как удобнее расположить отрезки? (Один под другим, тогда сразу видно, что денег не поровну, что на 10 рублей разница.)

– Покажем на схеме, как можно сделать так, чтобы денег в карманах стало поровну? Как уравнять отрезки? (Надо 10 разделить на две равные части – монеты по 5 рублей. Одну монету в 5 рублей оставить, а вторую переложить в другой карман.)

Теперь можно вернуться к предыдущей задаче, чтобы сравнить две ее модели–схемы. В результате обсуждения выясняем, что на первой схеме хорошо видно разницу в 8 рублей, сумма 30 рублей показана фигурной скобкой. На второй схеме лучше показана сумма – целое 30 рублей, но одинаковые отрезки («столько же») на глаз трудно определить, надо проверять циркулем. Сравнив обе схемы со схемой к задаче об уравнивании денег приходим к мнению:

– Будем работать с той моделью, на которой хорошо видно разницу и одинаковые части.

Учитель делает установку: надо найти три способа решения. При затруднении ученикам предлагаются для анализа выражения, которые нужно соотнести со схемой, преобразовать её в соответствии с каждым выражением и подумать: может ли данное выражение быть началом решения. В ходе обсуждения ученики трижды преобразовывают модель задачи и «выходят» на три способа ее решения.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Если бы брат отдал кому-нибудь 8 рублей, то у него стало бы денег столько же, сколько у сестры, а у них двоих стало бы на 8 рублей меньше: 30 – 8 | Если бы сестре кто-нибудь дал еще 8 рублей, то у нее стало бы денег столько же, сколько и у брата, а у них двоих стало бы на 8 рублей больше: 30 + 8 | Если бы брат с сестрой сначала разделили деньги поровну (30:2), тогда, чтобы у брата стало на 8 рублей больше, сестре надо отдать ему своих 4 рубля |

После такой подготовительной работы ученики могут самостоятельно закончить решение. Уточняется:

– Зачем убирали из 30-ти 8 или добавляли 8 к 30? (Мы старались получить равные части.)

– Как мы получали равные части? (Убирали лишнее или добавляли недостающее и получали две равные части.)

– Опираясь на две первые схемы, постарайтесь решить задачу двумя способами. Дети находят и объясняют такие решения:

|  |  |
| --- | --- |
| 1 способ: | 2 способ: |
| 1) 30-8=22 (р.) – станет всего,  2) 33:2=11 (р.) – у сестры,  3) 11+8=19 (р.) – у брата. | 1) 30+8=38 (р.) – станет всего,  2) 38:2=19 (р.) – у брата,  3) 19-8=11 (р.) – у сестры. |

– Я начала решать третьим способом так: 30 : 2 = 15 (р.). Что означает число 15? (По 15 рублей было бы у брата и у сестры, если бы деньги разделили поровну.)

– Продолжите решение по третьей модели.

Ученики могут предложить еще 2 действия, не объяснив, откуда взялось число 4. В этом случае следует обратить внимание на то, что в условии задачи дано число 8, а не число 4 и что надо доказать, откуда «взяли» число 4.

8 : 2 = 4 (р.) – сестра отдаст брату, чтобы у него денег стало на 8 рублей больше.

15 – 4 = 11 (р.) – останется у сестры, когда она отдаст 4 рубля брату.

15 + 4 = 19 (р.) – станет у брата.

– Как проверить последнее решение? (Из 19 вычесть 11, получится разница 8 рублей. К 19 прибавить 11 получится 30 рублей всего. Ответы 11 и 19 соответствуют условию задачи.)

– Подытожим. Охарактеризуем каждый способ решения. Что в них общего?

– Мы старались уравнять в первом случае по меньшей части, для чего большую уменьшили на 8 и целое 30 уменьшили на столько же. Во втором случае уравнивали по большей части, увеличив меньшую часть и целое 30 на 8. В третьем случае сразу разделили целое 30 на две равные части, а потом сделали их неравными с разницей в 8 рублей.

Уточнив особенности каждого из трех способов решения задачи о распределении целого на неравные части приемом предварительного их уравнивания, ученикам можно предложить задачу, усложненную по отношению к только что решенной, чтобы создать возможность применению «открытого» учениками приема в новой ситуации.

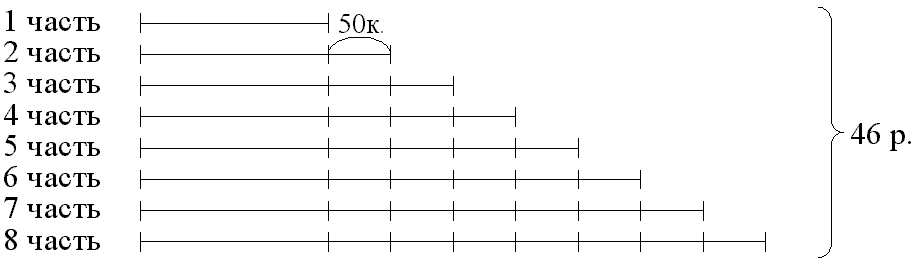
– Поработаем над старинной задачей. Она взята из книги, изданной ещё в XVIII веке. Её решают дети на протяжении двухста лет. Давным-давно для решения пользовались только рассуждениями. Я надеюсь, что и вы тоже справитесь со старинной задачей. Облегчит поиск решения модель-схема.

*Задача 2.* Разделить 46 рублей на 8 частей так, чтобы каждая часть была больше предыдущей на полтинник.

– Что такое полтинник, половина чего?

– Это 50 копеек или половина рубля.

– Получается, что в старину рубль называли ещё и тинном. Построите модель. Порассуждайте.



При обсуждении результатов самостоятельной работы выясняется закономерность: число полтинников увеличивается с каждой частью на 1, но по сравнению с номером части число «лишних» полтинников на 1 меньше. Можно не показывать на каждой части число полтинников, а по её номеру догадаться, на сколько полтинников она больше, чем первая часть. Ученики предлагают уравнять по 1-й части. По-разному подсчитывают число всех лишних полтинников и лишних денег в рублях, вычитают это из 46 рублей и узнают, сколько рублей приходится на 8 частей:

– По 50 копеек надо повторить 28 раз (нашел по модели пересчитыванием).

– А я считал сразу рубли, т.е. по 2 полтинника, получилось 14 рублей.

– Запишите выражение, показывающее число «лишних» полтинников. Подумайте, как легче найти его значение. Проверим, что у вас получилось. (1+2+3+4+5+6+7. Легче вычислять так: 1 и 7, 2 и 6, 3 и 5 – это 8, теперь надо по 8 взять 3 раза и прибавить к произведению 4, получится 28.)

– Зачем мы подсчитывали число полтинников? Как это поможет продолжить решение? (Можем узнать, сколько «лишних» денег в рублях: 28 разделили на 2, так как в каждом рубле содержится по 2 полтинника. Получается 14 рублей.)

– Зачем нам это число?

– Эти 14 рублей – лишние. Без них части станут равными.

– Продолжите решение сами с опорой на модель. (Учитель работает индивидуально, помогая догадаться затрудняющимся ученикам.)

– Проверяем. Объясните, как продолжили решение.

– Из 46 рублей надо вычесть 14 лишних рублей, остается 32. Эти 32 рубля надо разделить на 8 равных частей, получается 4 рубля. Это первая часть.

– Как определить остальные 7 частей?

– К 4 рублям надо прибавлять по 50 копеек.

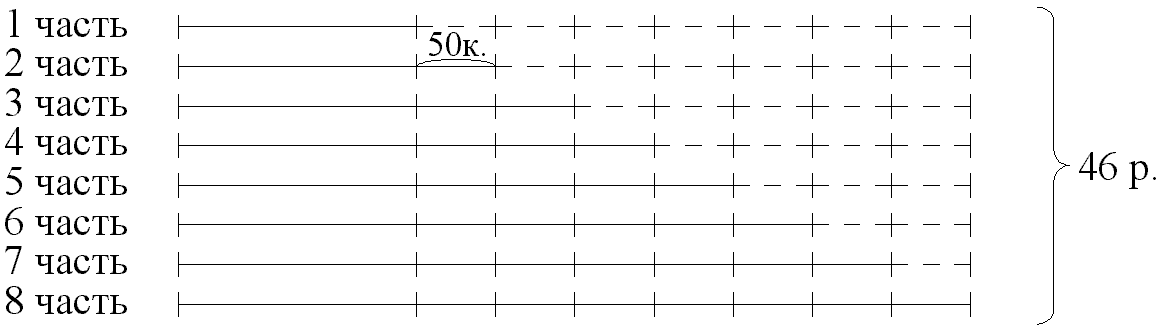
– Запишите через запятую все части, сделайте проверку.

– 4 р., 4 р.50 к., 5 р., 5 р.50 к., 6 р.,6 р.50 к., 7 р., 7 р.50 к. Надо сложить и проверить, получится ли 46 рублей.

– Как удобнее это сделать?

– Сначала сложить рубли, а потом копейки.

Обсуждаются и другие способы вычисления суммы. Затем учитель предлагает своё решение, а ученики объясняют идею этого решения (уравнивание по большей части) и смысл каждого действия.

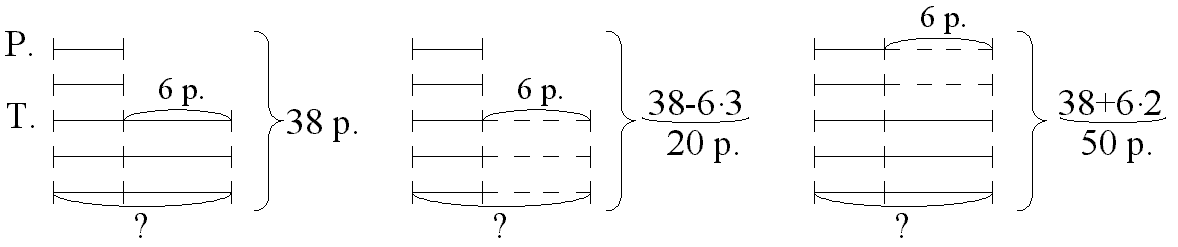


Главное «увидеть» по модели, что для уравнивания по большей части недостает 28 полтинников. Только сумма будет записана наоборот: 7+6+5+4+3+2+1. Для получения ответа нужно из значения большей части 7р.50к. вычитать по 50к.

Для последующего усложнения в задачу можно ввести три взаимосвязанные величины: цена, количество и стоимость. Сюжетом задачи будет покупка товара с неодинаковой ценой. Ключ к её решению – уравнивание цены.

*Задача 3.* За 2 ручки и 3 тетради заплатили 38 рублей. Какова цена тетради, если она дороже ручки на 6 рублей?

Модель к задаче строим по аналогии с задачей о распределении денег между братом и сестрой. Ученики находят два способа уравнивания неравных частей.



Труднее определить то, как изменится стоимость при уравнивании цены товара. Рассуждения детей:

– Если уравнивать по цене ручки – по меньшей части, то на схеме надо 3 раза убрать по 6 рублей. Значит стоимость (38 рублей) уменьшится на 6 рублей три раза.

– Если уравнивать по цене тетради – по большей части, то на схеме нужно 2 раза дорисовать отрезок, соответствующий 6-ти рублям. Поэтому стоимость (38 рублей) увеличится на 6 рублей два раза.

– Выявленные изменения стоимости записываем выражением, и находим новое значение стоимости.

Ученики продолжают самостоятельно решение по схемам и составляют такие выражения:

(38 – 6 · 3) : 5, (38 – 6 · 3) : 5 + 6, (38 + 6 · 2) : 5.

– Сравниваем выражения, проверяем, найден ли ответ на вопрос задачи. Находим значение искомого и выделяем рациональный способ решения.

– Почему в каждом случае вы делите на 5, хотя предметов только два вида: ручки и тетради? Может быть, как и в предыдущей задаче тоже надо разделить на 2?

– Надо делить на 5 потому, что при уравнивании хоть по большей, хоть по меньшей части получается 5 равных частей. Предметов всего 5: две ручки и три тетради.

– Все ли предложенные вами решения верны? (Первое выражение не дает ответ на вопрос задачи, так как, выполнив действия с числами, найдем меньшую часть – цену ручки, а не тетради. Второе и третье выражения дают ответ на вопрос задачи, вычислив, их значения получим 10 рублей.)

– Какое решение рациональнее? (Конечно же, последнее. Спрашивается про цену тетради. Разделив на 5, находим искомое. По второму выражению после деления на 5 находим цену ручки, а чтобы найти цену тетради, надо ещё прибавить 6.)

– Поработаем над следующей задачей. Прочитайте её, сравните с только что решенной, постройте к ней схему. (Задачи даны как на доске, так и на индивидуальных листах).

*Задача 4.* За ручку, три тетради, фломастеры и 2 набора красок нужно заплатить 60 рублей. Какова цена каждого из них, если ручка на 6 рублей дешевле тетради. Известно, что тетрадь на 3 рубля дороже красок, но на 2 рубля дешевле фломастеров.

– В данной задаче начало такое же, как и в предыдущей. Только ручка – одна, а не две. Хотя и сказано, что ручка дешевле тетради на 6 рублей, но это означает, то, же самое, что и «тетрадь дороже ручки на 6 рублей».

– Помогут ли ваши рассуждения построить модель задачи?

– Да, начать надо так же, как и раньше, а потом построить отрезок для цены фломастеров и два отрезка для цены красок. Всего 60 рублей.

– Выполните построение, проверяя отношения: больше или меньше и на сколько.

Во время самостоятельной работы учитель оказывает индивидуальную помощь. Для проверки и корректировки он на доске строит модель с ошибками.

– Для решения надо выбрать ту часть, или цену того предмета, по которой будем уравнивать цены остальных предметов.

– Лучше уравнять по цене тетради, так как цены ручки, фломастеров и красок даны в сравнении с ценой тетради.

– А может уравнять по меньшей части – по цене ручки?

– Можно, но ручка одна, а тетради три. Быстрее уравнять по цене тетради.

– Хорошо, остановимся на этом. Обсудим то, как изменится целое при уравнивании. (К цене ручки надо добавить 6 рублей, 60 увеличить на 6. Цену фломастеров надо уменьшить на 2, значит из суммы 60 и 6 надо вычесть 2. Цену красок увеличим на 3. Купили 2 набора, прибавлю по 3 рубля 2 раза.)

– Что получили в процессе и результате уравнивания? Сколько равных частей, каким выражением надо записать измененное целое – стоимость всех предметов? (Подсчитаю части: 1 да 3, да 1, да 2 – всего 7 частей, равных цене тетради.)

– Запишите выражение для целого: 60 + 6 – 2 + 3 · 2. (Получается 70 рублей.)

– Подумайте, что теперь можно узнать? Продолжите решение. Найдите цену каждого из предметов.

Ученики решают самостоятельно. Для проверки учитель вызывает тех, кто решил раньше. Решения обсуждаются фронтально. Находят рациональное. Делают проверку.

1) 70 : 7 = 10 (р.) – цена тетради.

2) 10 – 6 = 4 (р.) – цена ручки.

3) 10 + 2 = 12 (р.) – цена фломастеров.

4) 10 – 3 = 7 (р.) – цена красок.

Проверка: 4 + 10 · 3 + 12 + 7 · 2 = 60 (р.) – всего.

Подводя итог, учитель обращает внимание детей на то, что в последних двух задачах «работают» три взаимосвязанных величины: цена, количество и стоимость, и предлагает составить модель задачи в форме таблицы, в которой в графе «цена» данные числа и отношения между значениями этой величины лучше показать графически, т.е. моделью-схемой.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Предметы | Цена (руб.) | Количество (шт.) | Стоимость (руб.) |
| Ручка |  | 1 | ?  60 |
| Тетради | 3 | ? |
| Фломастеры | 1 | ? |
| Краски | 2 | ? |

– Такая модель поможет вам решить задачу, в которой речь идет не о нескольких предметах, а даже о десятках и сотнях. Тогда как изображать каждый предмет отрезком затруднительно, да в этом и нет необходимости. Теперь нам можно рассмотреть сложную старинную задачу на куплю-продажу.

В зависимости от подготовленности класса к использованию моделей-схем при решении задач можно организовать работу и по-другому: постепенно подвести учеников к сложной старинной задаче через ряд более простых. После решения тремя способами задачи на раздел денег между сестрой и братом учитель раздает ученикам листы с задачами и ставит цель:

– Будем читать последовательно эти задачи, и сравнивать следующую с предыдущей. Прочитайте первую, её сравним с только, что решенной.

*Задача 5.* За ручку и тетрадь заплатили 14 рублей. Разница в их цене 6 рублей. Какова цена каждого предмета?

– Задача почти такая же, как и про брата и сестру, но только не сказано, что именно дороже.

– Как это отразится на модели?

– Схема будет такая же, но мы не сможем указать, какой отрезок показывает цену ручки, а какой – тетради.

– Сможете ли определить части, из которых состоит целое – 14 рублей. (Да. Нужно из 14 вычесть 6, а полученное число 8 разделить на 2. Узнаем, что 4 – это меньшая часть, цена того, что дешевле. Легко найти и большую часть: 4 да 6 – это 10. Большую часть можно и так найти: из 14 вычесть 4.)

– Эту задачу мы решили. Но почему не смогли дать точный ответ? (В самой задаче не было сказано, что дороже.)

– Прочитайте вторую задачу. Сравните с предыдущей.

*Задача 6.* Три одинаковых ручки и тетрадь стоят 22 рубля. Тетрадь дороже на 6 рублей. Какова цена ручки?

– В этой задаче точно указано, что тетрадь дороже, чем ручка. (В ней дано три ручки, а не одна.)

– Попробуйте сами построить к ней схему. Уточните для себя: сколько предметов дано, т.е. сколько отрезков начертите; равны ли они между собой.

После самостоятельной работы детей учитель на доске чертит схемы для обсуждения и выбора из них той, которая может соответствовать задаче.

Ученики выбирают вторую, она соответствует условию задачи. Первая не подходит, так как по этой схеме получается, что ручка дороже тетради или что куплено три ручки, а не три тетради. На доске остаются обе схемы. Вторая схема корректируется, дети вносят в тетрадях исправления и по модели предлагают решение: (22 – 6) : 4 = 4 (р.) – цена ручки.

– Лучше уравнять по меньшей части. Именно это и неизвестно в задаче. Для уравнивания достаточно из целого 22 убрать разницу 6, получается, что на 4 равные части приходится 16 рублей, а на одну часть – 4 рубля (16 разделить на 4). Это цена ручки, т.е. ответ на вопрос задачи.

– Обратите ещё раз внимание на первую схему. Может быть она подойдет к следующей задаче? Читаем её.

*Задача 7.* Ручка и 3 одинаковые тетради стоят … рублей. Какова цена тетради, если она дороже на 6 рублей.

– Первая схема подходит к этой задаче, но она ведь неполная. Не дано целое, стоимость всех предметов.

– Дополните схему. Сравните новую задачу с предыдущей, в этом помогут модели. Определите, каким должно быть пока не данное нам целое. Сравните его с числом 22 рубля. (Изменилось количество ручек и тетрадей. Две ручки заменили на тетради. Каждая тетрадь дороже на 6 рублей, две – на 12 рублей. По сравнению с решенной задачей, в новой целое должно быть на 12 рублей больше. Увеличу 22 на 12, получу 34 рубля. Это число надо внести в модель.)

– Проверьте, всё ли в задаче и на модели теперь верно?

– Надо бы на схеме указать: ручка, тетради.

– Выполните модель в тетради, опираясь на ту, которая у вас есть для решенной задачи.

У учеников получается новая модель, которую располагают рядом с предыдущей.

Дети объясняют, что при построении модели заменили два отрезка – ручки на два отрезка – тетради. К цене двух ручек добавили по 6 р., поэтому и целое изменилось, стало 34 рубля.

– Как лучше уравнять части в этой задаче? (Уравняем по неизвестному, по цене тетради, прибавив к целому 34 рубля 6 рублей, получим, что 40 рублей приходится на 4 равные части.)

– Запишите решение задачи выражением, проверьте друг у друга, а я помогу тем, кто затрудняется.

– Читаем следующую задачу и думаем, как изменить вторую из схем, чтобы она соответствовала задаче.

*Задача 8.* На 34 рубля купили ручку, тетрадь, кисточку и набор красок. Ручка на 6 рублей дешевле тетради, а тетрадь на … рублей дороже кисточки и на столько же дешевле красок. Какова цена красок?

– Каким числом надо дополнить условие? Сначала обсудим как можно изменить вторую схему, чтобы она подошла к новой задаче. (Можно сказать, что из трех тетрадей одну оставили, другую заменили на кисточку, а третью – на краски.)

– Это и покажите на схеме.

К доске выходит ученик и объясняет:

– Отрезки для ручки и тетради оставляем такими же, как и были. Отрезок для кисточки должен быть короче, чем для тетради, а отрезок для красок на столько же длиннее. Всего – целое – 34 рубля.

– Итак, каким же числом надо дополнить условие задачи и схему, чтобы целое 34 рубля не изменилось?

– На сколько один отрезок уменьшили, на столько же другой увеличили, поэтому можно на схеме записать любое число.

– Какие же числа подойдут, уточните? На сколько можно уменьшать цену тетради? (Можно брать числа меньше цены тетради, т.е. от 1 до 9.)

– Выберите такое число, чтобы цены красок и кисточки были реальными. (Я предлагаю число 7.)

– Запишите на схеме число 7. Обозначьте искомое знаком вопроса. Решим задачу с этим числом. Что возьмем за основу при уравнивании частей? Как изменится целое при этом? (Уравняем по цене тетради, как и в предыдущей задаче. Добавим 6 рублей к цене ручки и 7 рублей к цене кисточки, а из цены красок уберем 7 рублей. Так же изменим и целое: 34 + 6 + 7 – 7 = 40.)

– На сколько равных частей приходится новое значение целого 40 рублей? Продолжите решение сами, затем проверим.

– Пока вы решали, я следила за вашей работой и увидела два разных решения. Записываю их на доске:

(34 + 6 + 7 – 7) : 4 = 10 (р.), (34 + 6 + 7 – 7) : 4 + 7 = 17 (р.).

– Какое из решений верное? (Верно второе, краски стоят 17 рублей. В первом решении найдена только цена тетради. Её ещё надо увеличить на 7, чтобы получить цену красок.)

– Найдите цену остальных предметов.

– Ручка стоит 4рубля (из 10 вычесть 6), а кисточка 3 рубля (10 минус 7).

– Сделайте проверку. (Сумма 4, 10, 3 и 17 равна 34.)

– По модели определите, насколько ручка дешевле красок? (На 6 да 7, на 13 рублей дешевле.)

– Насколько краски дороже кисточки? (На 7 да 7, на 14 рублей дороже.)

– Теперь обсудим другой способ решения задачи, уравниванием по большей части – по цене красок. (К цене ручки надо добавить 13 рублей, а к цене кисточки 14 рублей. Мы это только что нашли. Цену тетради надо увеличить на 7 рублей, по условию она дешевле на 7 рублей, чем краски.)

– Как изменится целое, какой станет стоимость? (К 34 надо прибавить 13, 14 и 7, т.е. всего 34, получится 68 рублей приходится на 4 части, равные цене красок.)

– Проверьте, сколько получится. (Конечно же 17, как и в первом способе решения: 68 : 4 = 17.)

– Какой способ для вас легче? (Первый, легче уравнять.)

– Уравнивать можно было бы и по ценам других предметов, но решая задачу способом уравнивания, надо сначала подумать, по какой части легче уравнять остальные. Ещё нам надо разобраться, в том, какие величины «работали» в трех последних задачах.

При затруднении учителю нужно подвести детей к выделению величин и помочь составить таблицу.

– Что означают найденные числа 4 рубля, 10 рублей, 3 рубля, 17 рублей? (Это стоимость одного предмета или цена.)

– Число 34 рубля также означает цену? (34 рубля стоят все предметы. Это стоимость.)

– Значение какой величины – 3 тетради, 1 ручка? (Это количество.)

– Итак, в решенных задачах «работали» величины цена, количество и стоимость.

– Мы рассмотрим старинную задачу о купле-продаже, для решения которой вам пригодится всё чему вы научились в процессе решения задач о школьных принадлежностях.Но, прежде чем перейти к старинной задаче, составим таблицу к задаче, которую решили сейчас. Изменим значение величины «количество» так: купили 2 тетради и 3 кисточки, тогда значение стоимости станет 50 рублей. Величины мы уже выделили, назовите их и объясните, отношения между значениями какой из этих величин нам помогут показать отрезки? (В задаче речь идет о цене, количестве и стоимости. Отрезками покажем цену и то, на сколько один предмет дороже или дешевле другого.)

– Начертите таблицу, впишите в нее названия величин. Впишите значение величины «количество». Как покажете, что 50 рублей – это стоимость всех предметов?

– Надо поставить фигурную скобку, объединяющую все предметы, а рядом написать 50.

– Чтобы сделать наглядными отношения между значениями величины «цена», мы это покажем отрезками на схеме.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Предмет | Цена (руб.) | Количество (шт.) | Стоимость (руб.) |
| Ручка |  | 1 | ?  50 р. |
| Тетрадь | 2 | ? |
| Кисточка | 3 | ? |
| Краски | 1 | ? |

– Составляя таблицу, вы наверно думали: «Зачем она нужна, если схему выполнить быстрее, и она занимает меньше места?». Да, для решения предыдущей задачи нам достаточно было схемы, а если покупают не один, два, три, а много предметов, то удобно сочетание схемы и таблицы. Чтобы вы убедились в том, что полезно уметь составлять не только схему, но и таблицу, мы сейчас начнем работать над более сложной задачей. (Учитель раздает листы с текстом старинной задачи).

*Задача 9. Какова цена сукна?*

Некто купил 64 рулона сукна. Из них 20 рулонов белого сукна, 13 рулонов черного, 5 красного, 19 зеленого, 7 лазоревого и уплатил за них 486 рублей. Цена же их была неравная: за черный рулон он заплатил на 4 рубля больше, чем за белый, за красный – на 3 рубля меньше, чем за черный, за зеленый на 2 рубля меньше, чем за красный, а за лазоревый на 1 рубль больше, чем за зеленый. Сколько денег он платил за каждый рулон?

– Я буду читать задачу, а вы следите по тексту. Прочитайте ещё раз задачу про себя. (Ученики читают.)

– О каком процессе и каких величинах идет речь в задаче?

– О купле-продаже: купец покупал сукно.

– Сравните эту задачу с предыдущей. Она ведь тоже о купле-продаже. (Да, в той задаче тоже говорилось о цене ручки, тетради и других предметов.)

– Значит, к этой задаче, как и к предыдущей для её решения нужно построить схему? (Попытаемся построить схему.)

– Но, прежде чем, это делать, обратите внимание на значения величины количество. Назовите несколько из них.

– Белого сукна 20 рулонов, черного – 13.

– Сколькими отрезками на схеме будете показывать количество и цену белого сукна? (Белого сукна 20 рулонов, значит надо начертить 20 отрезков.)

– А сколько всего отрезков придется строить?

– 64, столько всего рулонов сукна купил купец?

– Представьте объем работы. Удобно ли только отрезками моделировать задачу? Ясно, что 64 отрезка строить долго, надо что-то другое придумать. (Может лучше составить таблицу.)

– Попробуем сделать это. Назовите величины, характеризующие процесс купли-продажи.

– Три величины: цена, количество и стоимость.

– Назовите значения количества.

– 20, 13, 5, 19, 7 и всего – 64 рулона.

– Что известно о стоимости?

– За все сукно уплатили 486 рублей.

– Что сказано о цене? Известна ли цена, хотя бы одного вида сукна? (Сказано, что цена же их была неравная. Дается разница в ценах, но точно никакая цена не дана.)

– На какой модели удобнее показать неравную цену?

– На схеме, отрезками, чтобы разницу было видно.

– Тогда, какую модель задачи будем делать?

– Лучше составить таблицу. В ней числами запишем значения количества и общую стоимость.

– А как быть с ценой? (Цену лучше показать на отрезках. Для каждого вида сукна будем чертить только один отрезок.)

При необходимости ученикам можно задать ещё несколько наводящих вопросов, чтобы подвести их к мысли о целесообразности таблицы и громоздкости схемы.

– Приступаем к моделированию текста задачи. Начертите полосу для названия величин, впишите их: цена, количество рулонов, стоимость. Напишите названия видов сукна по цвету, начиная с белого.

– Теперь будем показывать отрезками цену сукна каждого цвета, читая частями условие задачи, именно то, что сказано о цене. Чтобы точнее показать отношения между значениями цены условимся, что 1 рубль – это клетка.

– Прочитайте о черном сукне. (За черный рулон заплатили на 4 рубля больше, чем за белый.)

– Как это покажите? (Для цены белого сукна выберем какой-то отрезок, например, в 6 клеток или 3 клетки, тогда для цены черного сукна отрезок должен быть длиннее на 4 клетки.)

Аналогично обсуждается цена красного, зеленого и лазоревого сукна. Результаты сначала ученики фиксируют в тетради, затем для корректировки – на доске. В таблицу вписывают значения количества и стоимости. Получается такая модель:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид  сукна | Цена (руб.) | Количество рулонов (шт.) | Стоимость (руб.) |
| Белое |  | 20  64 | ?  486 |
| Черное | 13 | ? |
| Красное | 5 | ? |
| Зеленое | 19 | ? |
| Лазоревое | 7 | ? |

– Что в задаче требуется узнать? Как отметить на модели искомое? (Неизвестно сколько денег купец платил за рулон каждого вида сукна.)

– Как вы это понимаете? (Нужно найти цену сукна каждого вида. Значит и вопрос надо поставить в графе цена.)

– Чтобы не загромождать схему, вопросы предлагаю поставить рядом с отрезками. Вы можете как и всегда провести дуги над отрезком и поставить знак вопроса.

– Посмотрите, на схему. Не подскажет ли она прием, которым можно решить задачу? (Можно уравнять цену. Лучше уравнять по цене белого сукна, потому что по чертежу видно, что рулон лазоревого и белого сукна стоит одинаково. Останется уравнять с ним цену ещё трёх сукон.)

– Как это сделать? (Цену черного рулона уменьшить на 4 рубля, а из цены красного убрать 1 рубль.)

– Я согласна, но красное сукно, как я вижу на схеме, дешевле на 3 рубля, а вы предлагаете другое – 1 рубль.

– Разница в цене красного и белого сукна – 1 рубль. Из 4-х вычесть 3, получится 1. Значит красное сукно дороже белого. Это видно и на схеме. (Чтобы уравнять цену зеленого сукна с белым надо добавить 1 рубль, это подсказывает схема.)

– А как доказать? (Мы уже узнали, что красное сукно на 1 рубль дороже белого, когда из 4-х вычли 3. Теперь из 2-х рублей надо вычесть этот 1 рубль, получится тоже 1. Это разница в цене белого и зеленого сукна. Также получилось и на чертеже: зеленоё сукно на 1 рубль дешевле, чем белое.)

– Докажите равенство цен белого и лазоревого сукна.

– В задаче сказано, что за рулон лазоревого сукна купец платил на 1 рубль больше, чем за зеленое. А сейчас мы доказали, что зеленое сукно на 1 рубль дешевле белого. Увеличив цену зеленого сукна на 1, получаем как раз цену белого. На чертеже все так и получилось.

Параллельно с обсуждением рядом со схемой фиксируются результаты поиска: уменьшить на 4 рубля (-4), убрать 1 рубль (-1), добавить 1 рубль (+1).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид  сукна | Цена (руб.) | Количество рулонов (шт.) | | Стоимость (руб.) |
| Белое |  | 20  64 | | ?  486 |
| Черное | 13 | ? | |
| Красное | 5 | ? | |
| Зеленое | 19 | ? | |
| Лазоревое | 7 | ? | |

Запись решения этой задачи по действиям слишком громоздка, поэтому при решении сочетаем графическое решение – рассуждение по схеме с алгебраическим – составлением выражения и арифметическим – записью по действиям.

– Составим выражение, которое покажет, как изменяется целое – стоимость всего сукна – 486 рублей при уравнивании цен за рулон сукна разных цветов. Сначала объясните, как изменится число 486 при уменьшении цены рулона черного сукна на 4 рубля. Тоже уменьшится на 4 рубля? (Нет, черного сукна было 13 рулонов, поэтому по 4 рубля уменьшать будем 13 раз. Значит из 486 надо вычесть 4 умноженное на 13.)

– Зафиксируем это изменение стоимости в таблице. В строке с данными о красном сукне напишем «4 ⋅ 13».

– Запишите в таблицу изменение стоимости всего сукна, которое произойдет с ней при уравнивании цены красного и зеленого сукна по цене белого. Проверим, что вы записали. Я впишу ваши предложения в таблицу.

– В строку «красное» надо записать минус 1 умножить на 5, а в строку «зеленое» – плюс 1 умножить на 19.

– Все ли согласны, и есть ли другое мнение? (Всё верно. Цену красного сукна уменьшаем на 1 рубль, а таких рулонов 5. Цену зеленого увеличиваем на 1 рубль, рулонов таких 19.)

– Почему же в строке «лазоревое» вы ничего не записали?

– Его цена такая же, как у белого, поэтому не надо изменять стоимость.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид  сукна | Цена (руб.) | Количество (шт.) | Стоимость (руб.) |
| Белое |  | 20  64 | ?  486 |
| Черное | 13 | ? -4⋅13 |
| Красное | 5 | ? -1⋅5 |
| Зеленое | 19 | ? +1⋅19 |
| Лазоревое | 7 | ? |

– Запишите в тетрадь выражение, которое показывает изменение целого. Я наблюдала за вашей работой в тетрадях, увидела, что у вас получилось такое выражение (записывает на доску): 486 – 4 ⋅ 13 – 1 ⋅ 15 + 1 ⋅ 19. Многие уже нашли его значение. Какое число получилось? (Получилось 448 рублей.)

– Какой смысл величины 448 рублей?

– Такой была бы стоимость всех рулонов сукна, если бы все они стоили одинаково, как и рулон белого сукна.

– Итак, мы уравняли цену рулонов сукна разного цвета по цене рулона белого. Узнали, каково значение измененного целого – 448 рублей. На сколько же равных частей приходится это число? (Частей столько, сколько и всех рулонов – 64. Это число дано в задаче.)

– Как связаны числа 448 рублей и 64 рулона?

– 448 рублей стоили бы 64 рулона, если бы каждый был куплен по цене белого сукна.

– Что можем узнать по этим числам?

– Узнаем цену белого сукна, когда 448 разделим на 64.

– Запишите это, вычислите цену рулона белого сукна и продолжите решение. Найдите, сколько стоит рулон сукна каждого цвета.

Ученики самостоятельно заканчивают решение. При фронтальной проверке доказывают выбор действия и чисел:

448 : 64 = 7 (р.) – цена белого сукна;

7 + 4 = 11 (р.) – цена черного сукна;

11 – 3 = 8 (р.) – цена красного сукна;

8 – 2 = 6 (р.) – цена зеленого сукна;

6 + 1 = 7 (р.) – цена лазоревого сукна.

– По схеме мы определили, что цена белого и лазоревого сукна одинаковая. А что показали вычисления?

– Цена белого – 7 рублей и лазоревого такая же – 7 рублей. Значит наше решение верно.

– Задачу мы решили. Теперь проведем её исследование. Обратите внимание на значение величины «количество». Число равных частей 64 мы взяли из условия, а нельзя ли было это определить по-другому?

– Можно было сложить числа 20, 13, 5, 19 и 7, чтобы узнать, сколько всего рулонов сукна купил купец.

– Вы проверили это? Проверьте.

– Да, при сложении получается 64.

– Что можно сказать о корректности данных в задаче?

– Одно данное лишнее. Можно было бы число всех рулонов – 64 не включать в условие.

– Да, можно было бы не давать число 64, или число рулонов сукна какого-либо одного цвета, а 64 – указать.

– Если бы не было дано, например, сколько рулонов красного сукна куплено, но дано было всего, как изменилось бы решение задачи? (Нужно было бы найти неизвестное число рулонов красного сукна.)

– Как это число нашли бы? (Из 64 вычли бы сумму чисел 20, 13, 19 и 7.)

– А если бы не было дано число рулонов белого сукна, то как бы это повлияло на решение задачи? (Нам при решении не понадобилось число рулонов белого сукна.)

– Да, но только потому, что мы уравнивали все цены по цене рулона белого сукна. Можно ли решить задачу по-другому? (Можно попробовать уравнять все цены по цене какого-нибудь другого сукна.)

– Давайте возьмем за основу цену рулона красного сукна, ориентируясь по схеме, сразу составим выражение, показывающее изменение общей стоимости в этом случае. Диктуйте мне, а я запишу выражение на доску. (Из 486 вычесть 3 умноженное на 13, затем прибавить 2 умноженное на 19.)

– Цены какого сукна уравняли? (Черного и зеленого с красным. Осталось белое и лазоревое сукно. Оно куплено по одинаковой цене. Значит лучше сразу вычислить, сколько всего рулонов куплено по такой цене: 20 и 7, всего 27. А цена этого сукна на 1 рубль меньше, чем красного.)

– Дополните выражение. (Ещё нужно прибавить 1, умноженное на 27, а всё, что записано взять в скобки и разделить на 64.)

– Составили выражение: (486 – 3 ⋅ 13 + 2 ⋅ 19 + 1 ⋅ 27) : 64. Найдите его значение. Что должно получиться? (Цена рулона красного сукна.)

– Запишите в тетрадь, вычислите, проверьте, верно ли рассуждаете.

После выполнения детьми вычислений и проверки (соотнесли полученное число 8 с первым решением) поводится итог. Ученики отвечают на вопросы.

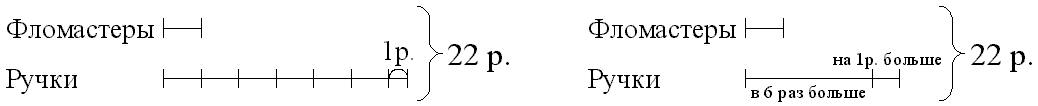
– Почему выбрали такую модель – сочетание таблицы со схемой? Каким приемом решили задачу? Скольки способами решили задачу? Можно ли решить ее ещё и другими, сколько их? (Ещё хотя бы два – уравнивание по цене черного или зеленого сукна).

Учитель обращает внимание на то, что для укорачивания записи решения его часть выполнялась по схеме (геометрическое или графическое решение), часть – записана выражением (алгебраический метод), а закончили запись решения по действиям – арифметически.

Отметим, что схемы-модели ко всем предложенным выше задачам выполнялись по методике, реализованной в учебниках математики Н.Б. Истоминой. Если бы взяли за основу формальный характер схем Л.Г. Петерсон, то вывести младших школьников на решение задач таким приемом вряд ли удалось бы. Разъясним это на примере ещё одной задачи.

*Задача 10.* Набор гелевых ручек и фломастеры вместе стоят 22 рубля. Сколько стоят ручки, если при уменьшении их цены сначала на 1 рубль, а затем в 6 раз получится цена фломастеров.

По Н. Истоминой: По Л.Г. Петерсон:



Если первый шаг в решении – уменьшение целого 22 рубля на 1 ещё как-то можно объяснить и по схеме Л.Г. Петерсон, то последующее деление 21 рубля на 7 обосновать по её схеме весьма затруднительно.

На схеме Н.Б. Истоминой дети видят 7 равных частей и сами предлагают второе действие решения, составляют выражение (22-1):7 для определения меньшей части – цены фломастеров. Затем для ответа на вопрос либо дополняют составленное выражение, либо продолжают решать по действиям:

22 – 1 = 21 (р.) – уменьшенная 3 ⋅ 6 = 18 (р.);

стоимость;

21 : 7 – 3 (р.) – цена фломастеров; 18 + 1 = 19 (р.) – цена ручек.

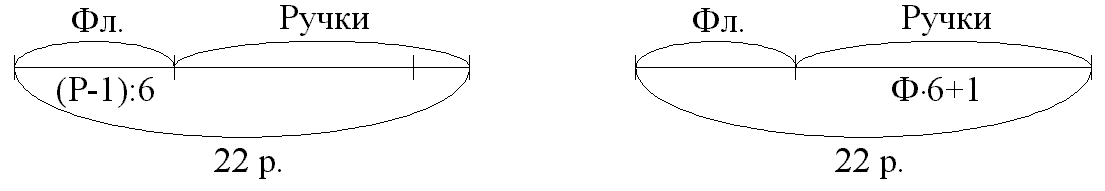
В учебниках Л.Г. Петерсон используется и ещё более формализованные схемы, подводящие детей к решению задачи составлением уравнения. Но всегда ли составленное к задаче уравнение младший школьник сможет решить?

Вернемся к задаче о сукне. Составим к ней уравнений, приняв за *х* цену рулона белого сукна:

*х* ⋅ 20 + (*х* + 4) ⋅ 13 + (*х* + 1) ⋅5 + (*х* – 1) ⋅ 19 + *х* ⋅ 7 = 486

Основываясь на аккуратно построенной схеме (по Н.Б. Истоминой), показывающей отношения между ценой, можно составить уравнение, для решения которого дети должны знать приемы его равносильного преобразования и упрощения. Последнее в начальной школе, как правило, не изучается. Однако, не решив уравнение, не решить и задачу.

Следовательно, предлагаемый Н.Б. Истоминой способ моделирования – построения схем с точным отражением отношений и связей между данными и искомыми дает больше возможностей младшим школьникам в решении задач, причем, разными способами. Не смотря на конкретность в отражении отношений, этот способ построения схем является наиболее приемлемым. Приведем другой вариант схемы по Л.Г. Петерсон (для примера возьмем задачу 10).



Составленные к задаче с помощью схем уравнения   
(*х* – 1) : 6 + *х* = 22 или *х* + *х* ⋅ 6 + 1 = 22 вообще-то выходят за рамки начальной школы. Правда, дети, обучающиеся по этому курсу, перегруженному материалом, обычно изучаемым в 5–6-х и более старших классах (например, алгоритмы), учатся составлять уравнения к задачам с первого класса. Они вынуждены, не всегда осмысленно, учиться решать и усложненные для начальных классов уравнения.

Для решения первого нужно обе части уравнения умножить на 6 (применение свойства равенств), затем использовать распределительный закон умножения, чтобы «подсчитать сколько всего иксов». Только после таких преобразований получится уравнение, изучаемое в курсе Л.Г. Петерсон   
*х* ⋅ 7 – 1 = 22 или *х* ⋅ 7 + 1 = 22.

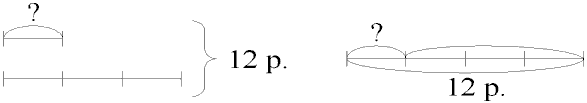
Излишняя формализация в решении задач младшими школьниками, как показали наблюдения и эксперимент, приводят к тому, что они «не видят» легкого очевидного решения весьма простых задач для детей обучающихся по курсу Н.Б. Истоминой. Например:

*Задача 11.* За ручку и тетрадь уплатили 12 рублей. Сколько стоит ручка, если она в три раза дешевле, чем тетрадь?

Ученики построили такие модели.



Требование показать отношение в три раза больше без слов, только схемой выполнили всего-то несколько учеников, и то не сразу.



Соответственно, только они и смогли решить задачу без уравнения, одним действием, разделив 12 на 4 равные части. Остальные ученики составляли уравнение: *х* + *х* ⋅ 3 = 12.

Таким образом, действенность моделей-схем, их «помощь» в поиске решения зависит от того, как составлена модель, насколько конкретно, понятно она представляет «работающие» в задаче понятие и связи между ними. К некоторым задачам удобно составлять комплексную модель, сочетающую таблицу и графическую схему.

Сочетание разных методов при решении задач   
с пропорциональными величинами

Решение задачи разными методами, получение из нее новых, более сложных задач и их решение в сравнении с решением исходной задачи создает предпосылки формированию у ученика умения находить свой «оригинальный» способ решения изученной задачи, воспитывает стремление вести самостоятельно поиск решения новой задачи, той, которая раньше ему «не встречалась». Широкие возможности в этом плане дают задачи с тройкой пропорционально зависимых величин.

Использование прямо и обратно пропорциональных зависимостей величин при решении задач с тройкой пропорционально связанных величин: цена, количество, стоимость; скорость, время, расстояние; масса 1 предмета, их количество, общая масса (вся масса или масса всех предметов) и т.п. зачастую позволяет находить отличный от изучаемого по традиционному начальному курсу математики способ решения таких задач. Поиск «другого» способа решения задач на основе применения указанной зависимости величин покажем на примере задач на нахождение 4-го пропорционального. При этом мы будем комбинировать арифметический метод решения с табличным (выявление характера пропорциональной зависимости) и с графическим (наглядное представление текста задачи и зависимости величин).

Возьмем сюжет о швейной фабрике. *Задача 1.* На пошив *А* одинаковых изделий израсходовано К м ткани. Сколько ткани потребуется на пошив *В* таких же изделий? Итак, в этой задаче количество изделий и общий расход ткани – переменные величины, а расход на одно изделие – величина постоянная – коэффициент пропорциональности. Он равен *К* : *А*. Обозначив буквой *Х* искомое число, получим выражение *Х* : *В* (тоже расход на изделие) и равенство *К* : *А* = *Х* : *В*, т.е. пропорцию, в которой неизвестен один из 4-х ее членов.

Обычно такую задачу начинают решать с нахождения значения постоянной величины. План решения: сначала найдем расход на 1 изделие, а затем – на *В* изделий. Решение: *Х* = (*К* : *А*) ⋅ *В*. Однако, по данной задаче можно составить еще и другую пропорцию (условимся, что *В* > *А*): *В* : *А* = *Х* : *К*, где *В* : *А* показывает, во сколько раз увеличилось число изделий, а *Х* : *К* – во столько раз увеличился расход ткани. Равенство отношений выражает прямо пропорциональную зависимость между количеством изделий и общим расходом ткани при постоянной норме расхода на 1 изделие. Использование данной зависимости позволяет решить задачу вторым способом. Сначала находим, во сколько раз увеличился общий расход ткани, т.е. число *К*. Количество изделий увеличилось в *В* : *А* раз, значит и расход ткани на *В* изделий увеличился во столько же раз. Поэтому для решения задачи увеличим *К* в *В* : *А* раз. Получим другой способ решения задачи: *Х* = *К* ∙ (*В* : *А*), который в начальных классах почти не применяется. Одной из причин этого является то, что в задачах с пропорциональными величинами из начального курса математики не всегда *В* делится на *А* нацело (*В* «не делится» на *А*), в связи с чем младшие школьники не могут найти результат первого действия.

Рассмотрим конкретные примеры задач.

*Задача 2.* На пошив 8-ми одинаковых пальто израсходовано 24 м ткани. Сколько ткани потребуется на 2 таких же пальто?

Составим таблицу и пронаблюдаем, как изменяется общий расход ткани в зависимости от изменения количества сшитых пальто (расход на 1 пальто – постоянная величина).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Количество  пальто | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... | А | ... | В |
| Общий  расход ткани (м) | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | ... | К | ... | Х |

Сравнение чисел в первой и второй строках позволяет выявить, что:

– с увеличением (уменьшением) количества сшитых пальто увеличивается (уменьшается) и количество расходуемой на их пошив ткани;

– с каждым следующим сшитым пальто расход ткани увеличивается на 3 м (столько ткани нужно на его пошив).

Для выявления прямо пропорциональной зависимости рассматриваемых величин нужно взять такой фрагмент таблицы, чтобы количество изделий увеличивалось кратно, например в 2 раза.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Количество  пальто | 1 | 2 | 3 | 4 | 8 | 16 | 32 | ... | А | ... | В |
| Общий  расход ткани (м) | 3 | 6 | 12 | 24 | 48 | 96 | 21 | ... | К | ... | Х |

Сравнивая соседние числа первой и второй строк, убеждаемся, что если количество изделий увеличилось в 2 раза, то и расход ткани увеличился во столько же раз (в 2 раза).

Сравнив 2 пары значений данных величин: на 4 пальто – 12 м и на 32 пальто – 96 м, приходим к выводу, что увеличение количества изделий в 8 раз (32 : 4 = 8) привело к увеличению расхода ткани тоже в 8 раз (96 : 12 = 8). В общем виде: если *В* : *А* = *N* (раз), то и *Х* больше, чем *К*, в *N* раз. Это прямо пропорциональная зависимость величин, которую можно истолковать и по другому: если количество изделий уменьшить в несколько раз, то во столько же раз уменьшится и расход ткани. Так, на 32 пальто нужно 96 м, а на 4 – только 12 м: 32 уменьшили в 8 раз, получили 4 и 96, уменьшив тоже в 8 раз, получили 12.

Теперь нетрудно найти 2 способа решения задачи 2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Расход на  1 изделие | Количество изделий | Общий расход  ткани |
| О д и н а –  к о в ы й | 2 пальто  8 пальто | **?** м  24 м |

|  |  |
| --- | --- |
| 1 способ:  24:8=3(м) – на 1 пальто;  3∙2=6(м) – на 2 пальто. | 2 способ:  8:2=4 – изделий в 4 раза меньше, потому и ткани должно быть израсходовано 4 в раза меньше;  24:4=6(м) – в 4 раза меньше, чем   24 м. |

На примере задачи 3, полученной из задачи 2 изменением условия и вопроса, покажем другой вариант использования прямо пропорциональной зависимости величин.

*Задача 3.* На швейной фабрике мастер-швея сшила одинаковые пальто, израсходовав на них 24 м ткани. Ее ученица сшила 2 таких же пальто и израсходовала на них 6 м ткани. Сколько всего пальто сшили мастер и ученица?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Расход на  1 изделие | Количество  изделий | Общий расход ткани |
| О д и н а –  к о в ы й | 2 пальто  **?**  ? | 6 м  24 м |

Эту задачу можно решить 4-мя способами: 2 из них – традиционны, а 2 – с использованием зависимости величин.

|  |  |
| --- | --- |
| 1 способ: | 2 способ: |
| 6 : 2 = 3 (м) – на 1 пальто; | 6 : 2 = 3 (м) – расход на 1 изделие; |
| 24 : 3 = 8 (пальто) – из 24 м; | 24 + 6 = 30 (м) – всего ткани; |
| 8 + 2 = 10 (пальто) – всего. | 30 : 3 = 10 (пальто) – сшили мастер и ученица. |

|  |  |
| --- | --- |
| 3 способ: | 4 способ: |
| 24 : 6 = 4 – в 4 раза больше ткани; | 24 + 6 = 30 (м) – всего ткани; |
| 2 ∙ 4 = 8 (пальто) – тоже в 4 раза больше; | 30 : 6 = 5 – в 5 раз ткани больше; |
| 8 + 2 = 10 (пальто) – сшили мастер и ученица. | 2 ∙ 5 = 10 (пальто) – их тоже в 5 раз больше. |

В задаче 2 изменим вопрос и получим новую задачу, решаемую 3–мя способами.

*Задача 4.* Если на пошив 8 одинаковых пальто требуется 24 м ткани, то на сколько меньше ткани потребуется на 2 таких же пальто?

Первые два способа решения данной задачи получаются из приведенных выше способов решения задачи 2 добавлением третьего действия: 24–6=18(м). Для нахождения 3–го способа лучше применить графическую иллюстрацию текста задачи. На схеме легко увидеть выявленную ранее зависимость величин: общий расход ткани увеличивается с каждым сшитым пальто на одно и то же число, равное расходу ткани на 1 изделие, а также связь отношений больше и меньше: на сколько больше потребуется ткани на 8 пальто, чем на 2, на столько же меньше – на 2 пальто, чем на 8.

|  |  |
| --- | --- |
| *Рис. 16* | 24 : 8 = 3 (м) – расход на 1 пальто;  8 – 2 = 6 – на столько пальто больше;  3 ∙ 6 = 18(м) – на столько больше ткани нужно на 8 пальто или меньше на 2 пальто. |

Аналогично, изменив вопрос в задаче 3 на другой: «На сколько больше пальто сшито мастером-швеей?», – получим задачу 5, решаемую несколькими способами. Приведем один из них.



|  |  |
| --- | --- |
| 1) 24 – 6 = 18 (м);  2) 18 : 6 = 3 (раза); | 3) 2 ∙ 3 = 6 (пальто) – на столько больше пальто сшито мастером. |

Наконец, изменив частично условие задачи 3, получим задачу 6, решение которой опирается на идеи, использованные в задачах 2–5.

*Задача 6.* На швейной фабрике мастер-швея сшила одинаковые пальто, израсходовав на них 24 м ткани. Ее ученица сшила на 6 пальто меньше, израсходовав на них в 4 раза меньше ткани. Сколько всего пальто сшили мастер и ее ученица?

|  |  |
| --- | --- |
|  | 24 : 4 = 6 (м) – ткани израсходовано ученицей;  24 – 6 = 18 (м) – на столько меньше ткани израсходовано ученицей, т.е. приходится на 6 пальто;  18 : 6 = 3 (м) – на 1 пальто. |

Закончить решение можно по–разному. Используем прямо пропорциональную зависимость величин: ученица израсходовала в 4 раза меньше ткани, следовательно, и количество сшитых ею пальто в 4 раза меньше, с учетом того, что пальто одинаковые.

24 : 3 = 8 (пальто) – сшила швея;

8 : 4 = 2 (пальто) – сшила ученица (в 4раза меньше, чем швея);

8 + 2 = 10 (пальто) – сшили вместе.

Найдем общий расход ткани: 24 + 6 = 30 (м), а затем общее количество пальто: 30 : 3 = 10 (пальто).

|  |  |
| --- | --- |
| *Рис. 19* | Решить задачу можно и гораздо быстрее, не находя расход ткани на 1 изделие. Из чертежа – модели текста задачи следует, что на 3 части приходится 6 пальто, тогда на 1 часть – 2 пальто. Всего – 5 частей (4 + 1) или 10 пальто (по 2 – 5 раз, 2 ∙ 5 = 10). |

Приведем еще пример задачи, связанной с движением, т.е. на тройку пропорционально зависящих величин: скорость, время и расстояние.

*Задача 7.* Поезд, отправившись со станции *А*, прошел до станции *В* за 3 часа 210 км, после чего скорость его движения была снижена на 10 км/ч. Со сниженной скоростью поезд шел от *В* до следующей станции *С* в 2 раза дольше, чем от *А* до *В*. Определите расстояние *АС*.

Задача решается в 5 действий: 210 : 3 = 70 (км/ч); 70 – 10 = 60 (км/ч); 3 ∙ 2 = 6 (часов); 60 ∙ 6 = 360 (км); 210 + 360 = 570 (км).

Полезно обсудить, с учениками возможен ли следующий способ решения:

210 ⋅ 2 = 420 (км) – время в 2 раза больше, поэтому и расстояние *ВС* в 2 раза больше, чем *АВ*;

210 + 420 = 630 (км) – расстояние *АС*.

Выявив причину (скорость изменилась, не является постоянной величиной), по которой нельзя так решать эту задачу, все–таки нужно попытаться найти другой способ решения с использованием прямо пропорциональной зависимости расстояния от времени при постоянной скорости. Предположим, что скорость не изменилась. Тогда расстояние *ВС* в 2 раза больше, чем *АВ*, так как время движения от *В* к *С* в 2 раза больше (шёл дольше). Расстояние *ВС* было бы равно 210 ∙ 2 = 420 (км), но скорость изменилась. Каждый час поезд проходил на 10 км меньше. За 6 часов (3∙2) он прошел на 60 км меньше (по 10 км 6 раз). Следовательно, расстояние *ВС* на самом деле равно 360 км, потому что 420 км нужно уменьшить на 60 км. Остается найти сложением расстояние *АС*: 210 + 360 = 570 (км). Итак, хотя задача решена тоже 5-ю действиями, но поиск этого способа решения способствует осознанию детьми двух разных по характеру зависимостей величин и поиску новых способов решения задачи, основанных на тех же зависимостях.

Возможны еще два способа решения задачи 7.

|  |  |
| --- | --- |
| 2 способ: | 3 способ: |
| 210 ⋅ 2 = 420 (км); | 10 ⋅ 3 = 30 (км); |
| 210 + 420 = 630 (км); | 210 – 30 = 180 (км); |
| 3 ⋅ 2 = 6 (часов); | 180 ⋅ 2 = 360 (км); |
| 10 ⋅ 6 = 60 (км); | 210 + 360 = 570 (км). |
| 630 – 60 = 570 (км). |  |

Если ученики не смогут найти какой-либо из данных способов решения задачи, учителю следует записать их на доске и предложить детям объяснить, что найдено в каждом действии, проверить возможность решения задачи такими способами.

Полезно также, упростив условие (пусть скорость не изменяется, остается постоянной), предложить ученикам решить задачу одним действием и указать «лишние» данные.

*Рис. 20*

При постоянной скорости расстояние *ВС* больше *АВ* в 2 раза. Весь путь *АС* в 3 раза больше, чем *АВ* (210 км). Решение: 210 ∙ 3 = 630 (км), а 3 часа – лишнее данное.

Аналогично прямо пропорциональной зависимости для поиска разных способов решения задачи можно использовать и обратно пропорциональную, которой в начальном обучении математике почти не уделяют внимания. Рассмотрим указанную зависимость на том же сюжете о швейной фабрике. Имеется 2 одинаковых по длине тюка ткани. Из одного сшили *А* детских платья, расходуя на каждое по *С* м, а из другого – *В* одинаковых взрослых. Каков расход ткани на каждое из них?

Постоянная величина в такой задаче – общий расход ткани (два одинаковых по длине тюка). Если расход на одно взрослое платье обозначить *Х* (по сюжету задачи *Х* > *С*), то верно равенство: *С* ∙ *А* = *Х* ∙ *В*. Начало решения – нахождение значения постоянной величины: *С* ∙ *А* – длина первого тюка, а значит – и второго. Зная это число и количество взрослых платьев, можно найти искомое – расход на каждое из них: *Х* = (*С* ∙ *А*) : *В* – первый способ решения.

Для нахождения другого способа на конкретном примере рассмотрим обратно пропорциональную зависимость величин. Пусть в тюке 24 м ткани. Если, например, на платье двухлетней девочки достаточно 1 м ткани, то сшить можно 24 таких платья. Если же шить платья больших размеров, на каждое из которых потребуется больше ткани, то и платьев будет получаться из 24 м все меньше и меньше.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Расход на 1 изделие | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | ... | С | ... | Х |
| Количество изделий | 24 | 12 | 8 | 6 | 4 | ... | А | ... | В |

Итак, сравнение чисел первой и второй строк показывает, что с увеличением расхода на 1 изделие их количество уменьшается или с уменьшением количества изделий расход на каждое из них увеличивается, а с увеличением количества изделий (4, 6, 8, 12, 24) уменьшается расход на каждое из них (6, 4, 3, 2, 1). Причем, следует напомнить, что каждый раз платья одинаковые из одного и того же тюка длинною 24 м, т.е. общий расход – величина постоянная.

Связь между рассматриваемыми величинами можно сформулировать еще точнее, выявив обратно пропорциональную зависимость между расходом на 1 изделие и количеством изделий при постоянном общем расходе ткани. Сравним две пары значений переменных величин: расходуя на 1 платье по 2 м, можно сшить 12 платьев, а, сшив взрослые (вечерние) платья, при расходе на них по 6 м можно получить только 4 платья. Следовательно, с увеличением расхода ткани в 3 раза (6 : 2 = 3) количество изделий, наоборот, уменьшилось во столько же раз: 12 : 4 = 3 (раза). Это подтверждает обратно пропорциональную зависимость названых величин. В общем виде: если *А* : *В* = *N* (раз) – в *N* раз *В* меньше, чем *А*, то Х, наоборот, в N раз больше, чем *С*. Отсюда можно получить второй способ решения задачи. Чтобы найти *Х*, нужно *С* увеличить в *А* : *В* раз: *Х* = *С* ⋅ (*А* : *В*).

Вернемся к равенству двух произведений: *С* ⋅ *А* = *Х* ⋅ *В*. Из него, основываясь на изменении множителей, также можно вывести обратно пропорциональную зависимость расхода на 1 изделие (*С* и *Х*) и их количества (*А* и *В*) при постоянном общем расходе. Если множитель *А* в несколько раз больше множителя *В*, то для равенства значений произведений нужно, чтобы множитель *С* был во столько же раз меньше множителя *Х*. Если же *А* в *N* раз меньше, чем *В*, то *С* должно быть в *N* раз больше, чем *Х*.

*Задача 8.* Из тюка ткани сшили 24 детских платья, расходуя на каждое из них по 1 м. Сколько взрослых платьев с расходом по 4 м на каждое могло бы получиться из этого же тюка ткани?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Расход на  1 изделие | Количество  изделий | Общий расход  ткани |
| 1 м | 24 платья | О д и – |
| 4 м | ? | н а к о в |

1 способ: 1 ∙ 24 = 24 (м) – ткани в тюке;

24 : 4 = 6 (платьев) – взрослых.

2 способ: 4 : 1 = 4 (раза) – в 4 раза увеличился расход на 1 платье, значит платьев получится в 4 раза меньше: 24 : 4 = 6.

*Задача 9.* На швейной фабрике имелось два одинаковых тюка ткани. Из одного сшили 20 наволочек, расходуя на каждые 2 наволочки по 3 м ткани, а из другого – пододеяльники, на каждый из которых потребовалось ткани в 5 раз больше, чем на 1 наволочку. Сколько сшили пододеяльников?

План традиционного решения этой задачи несложен: нужно найти длину тюка ткани (общий расход на наволочки или пододеяльники), затем расход на 1 пододеяльник, а тогда можно будет узнать и их количество. Общий расход ткани можно определить, используя его прямо пропорциональную зависимость от количества сшитых наволочек: на 2 наволочки нужно 3 м ткани, тогда на 20, их теперь в 10 раз больше, потребуется и в 10 раз больше ткани: 3 ⋅ (20 : 2) = 30 (м). Но как найти расход ткани на 1 пододеяльник? Если 3 м «не делится» на 2, то, какое же число увеличивать в 5 раз?

Ответить на вопрос задачи можно, выполнив всего лишь одно действие и применив обратно пропорциональную зависимость расхода на 1 изделие и их количества при постоянном общем расходе. Если на 1 пододеяльник требуется ткани в 5 раз больше, чем на 1 наволочку, то из одинаковых тюков ткани пододеяльников получится в 5 раз меньше, чем наволочек. Итак, задача решается одним действием: 20 : 5 = 4 (пододеяльника), а данные задачи: на каждые 2 наволочки расходуется по 3 м ткани – лишние.

Изложенные выше приемы организации работы над задачами учителя могут использовать при обучении младших школьников по любому из практикуемых в современной начальной школе курсов математик, нацеливая учеников на поиск разных способов решения задачи и выбор наиболее рационального из них.

Ниже приведем несколько задач, каждую из которых ученик 4-го класса может решить традиционным способом. Кроме того, для каждой из этих задач можно найти и рациональный способ решения на основе использования пропорциональной зависимости входящих в ее сюжет величин или геометрической модели текста задачи-схемы. Нацелив учеников на поиск рационального способа решения задачи, учителю следует организовывать обсуждение того, почему задачу можно решить «по-другому», как нужно рассуждать при этом. Можно записать на доске несколько решений к одной задаче и предложить выбрать из них верное, доказать его выбор. Полезно к данным задачам составлять обратные, такие, которые можно решить в начальной школе.

Задачи

*Задача* *1.* Теплоход в течение двух дней был в пути 17 ч. В первый день он прошел 250 км, во второй – 175 км. В какой день теплоход был дольше в пути и, на сколько часов, если он все время шел с одинаковой скоростью?

*Задача* *2.* Расстояние от города до дачного поселка велосипедист проехал за 3 часа со скоростью 14 км/ч. Возвращаясь обратно, он то же расстояние проехал за 6 часов. Как изменилась скорость велосипедиста?

*Задача* *3.* Расстояние между городом и селом 150 км. Из города в село выехал мотоциклист со скоростью 60 км/ч. В то же время навстречу ему из села по той же дороге выехал велосипедист со скоростью в 4 раза меньшей, чем у мотоциклиста. На каком расстоянии от села, он встретил мотоциклиста?

*Задача* *4.* Два пловца поплыли одновременно по реке в противоположных направлениях, первый плыл со скоростью 80 м/мин, второй плыл в 2 раза медленнее. Сколько метров проплывет второй пловец, когда первый проплывет 240 м? На каком расстоянии друг от друга они будут в это время?

*Задача* *5.* Туристы на велосипеде за два дня, двигаясь с постоянной скоростью, удалились от города на 120 км. В первый день они были в пути 4 часа, а во второй – на 2 часа дольше. На сколько путь, пройденный туристами в первый день, короче, чем во второй?

*Задача* *6.* На швейной фабрике из одного тюка ткани сшили 12 одинаковых платьев, а из другого тюка таких же платьев вышло в 3 раза меньше. Сколько метров ткани было в каждом тюке, если в одном из них было на 16 метров больше ткани, чем в другом?

*Задача* *7.* Одна бригада рабочих может построить 18 км шоссейной дороги за 30 дней, а другая будет строить эту дорогу в 2 раза дольше. За сколько дней смогут построить эту дорогу обе бригады, работая вместе?

*Задача* *8.* Для отправки в магазины было заготовлено 4500 кг огурцов. Причем 2/6 этих огурцов разложили в ящики по 15 кг в каждый, а остальные в ящики, вмещающие в 2 раза больше огурцов. Сколько всего ящиков понадобилось для укладки огурцов?

*Задача* *9.* С одного участка собрано 480 кг винограда, а с другого – в 3 раза больше. Весь виноград был разложен в ящики по 12 кг в каждый. Четвертую часть собранного винограда отправили в магазин, а шестую часть остатка – в детские сады. Сколько ящиков с виноградом отправили в детские сады и сколько ящиков осталось?

*Задача* *10.* На склад привезли 4560 кг муки в мешках, по 80 кг в каждом, и 3840 кг крупы в мешках, по 60 кг в каждом. На сколько больше привезли мешков с крупой, чем с мукой? Как изменится решение задачи при условии, что: 1) мешки были одинаковые – по 80 кг; 2) что муки и крупы было поровну – по 4560 кг?

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. *Абдульманов Р.Н., Климеченко Д.В., Шихалиев Х.Ш.* Различные комбинаторные упражнения // Начальная школа. – 1977. – № 6. – С. 34-39.
2. *Александрова Э.И.* Методика обучения математике в начальной школе. 1 класс (Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова): Пособие для учителя. – 3-е изд. – М.: Вита – Пресс, 2004. – 240 с.
3. *Аргинская И.И.* Методическое пособие к учебнику «Математика». 4 класс. – Самара: Корпорация «Федоров», Издательство «Учебная литература», 2002. – 160 с.
4. *Ассонова Р.А., Ассонова Н.В.* Решение задач методом перебора в курсе математики I и II классов // Начальная школа. – 2007. – № 10. – С. 32–37.
5. *Байрамукова П.У.* Внеклассная работа по математике в начальных классах. – М., 1997. – 93 с.
6. *Беденко М.В.* Сборник текстовых задач: 1-4 класс. – М., 2006. – 272 с.
7. *Белокурова Е.Е.* Некоторые комбинаторные задачи в начальном курсе математики // Начальная школа. – 1992. – № 1. – С. 20-25.
8. *Белокурова Е.Е.* Методика обучения решению комбинаторных задач с помощью таблиц и графов // Начальная школа. – 1994. – № 12. – С. 43-47.
9. *Белокурова Е.Е.* Обучение решению комбинаторных задач с помощью таблиц и графов // Начальная школа. – 1995. – № 1. – С. 21-24.
10. *Белокурова Е.Е.* Характеристика комбинаторных задач // Начальная школа. – 1994. – № 1. – С. 18-26.
11. *Белошистая А.В.* Прием графического моделирования при обучении решению задач // Начальная школа. – 1991. – № 4. – С. 77-81.
12. *Бородулько М.А., Стойлова Л.П.* Обучение решению задач и моделирование // Начальная школа. – 1996. – № 8. – С. 26-32.
13. *Внеклассная работа по математике* (олимпиада, логические задачи, дидактические игры и др.) // Начальная школа. – 1997. – № 6. – С. 19-37.
14. *Волина В.В.* Праздник числа (Занимательная математика для детей). – М., 1993. – 336 с.
15. *Воронова И., Булгакова Т.* Дорогая моя столица // Начальная школа. – 1997. – № 1. – С. 48-49.
16. *Воротникова Н.* Даты и числа из истории Москвы // Начальная школа. – 1997. – № 9. – С. 45-46.
17. *Всероссийский интеллектуальный марафон учеников – занковцев* // Начальная школа. – 2004. – № 1. – С. 108-112.
18. *Депман И.Я.* Мир чисел. – М., 1975. – 73 с.
19. *Для внеклассных занятий* (математическая олимпиада, логические упражнения и др.) // Начальная школа. – 1996. – № 6. – С. 20-28.
20. *Для внеклассных занятий по математике* (задачи повышенной трудности, праздник числа и др.) // Начальная школа. – 1998. – № 7. – С. 51-81.
21. *Загородных К.А.* Возможности использования графов при обучении в начальной школе // Начальная школа. – 2004. -№ 11. – С. 87-91.
22. *Задачи для внеклассной работы по математике в V-VI классах*: Пособие для учителей / Сост. В.Ю.Сафонова. Под ред. Д.Б. Фукса, А.Л. Гавронского. – М.: МИРОС, 1993. – 72 с.
23. Зак А.З. Развитие умственных способностей младших школьников. – М., 1994. – 320 с.
24. *Занимательная математика.* 5–11 классы. (Как сделать уроки математики нескучными) / Авт.-сост. Т.Д. Гаврилова. – Волгоград: Учитель, 2005. – 96 с.
25. *Зиновьев П.М.* Решение задач методами предположения // Начальная школа. – 2003. – № 10. – С. 59-62.
26. *Злоцкий Г.В.* Некоторые приемы организации внеклассной работы по математике // Начальная школа. – 1989. – № 6. – С. 29-32.
27. *Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки, или Арифметика для всех. – М.: ООО «Издательство АСТ», 2004. – 125 с.
28. *Истомина Н.Б.* Методика обучения математике в начальной школе: Развивающее обучение. – Смоленск: Изд-во «Ассоциация XXI век», 2005. – 272 с.
29. *Истомина Н.Б., Нефедова И.Б.* Первые шаги в формировании умения решать задачи // Начальная школа. – 1998. – № 11-12. – С. 42-47.
30. *Истомина Н.Б., Шикова Р.Н.* Формирование умения решать задачи разными способами // Начальная школа. – 1985. – № 9. – С. 50-55.
31. *Карасева О.* Интересные числа из истории Кремля  
    // Начальная школа. – 1997. – № 1. – С. 49-50.
32. *Касярум Е.И., Поздняков И.И., Позднякова И.И.* Решение задач разными способами как средство развития учащихся // Начальная школа. – 1992. – № 3. – С. 30-36.
33. *Клименченко Д.В.* Задачи по математике для любознательных. – М., 1992. – 192 с.
34. *Клименченко Д.В.* Задачи с многовариантными решениями // Начальная школа. – 1991. – № 6. – С. 25-29.
35. *Клименченко Д.В.* Задачи, воспитывающие исследовательские умения у младших школьников // Начальная школа. – 1983. – № 7. – С. 51-55.
36. *Клименченко Д.В.* Решение задач методом отбора // Начальная школа. – 1995. – № 2. – С. 30-34.
37. *Клименченко Д.В.* Решение текстовых задач различными способами // Начальная школа. – 1986. – № 4. – С. 28-30.
38. *Клименченко Д.В.* Свойства интересные и удивительные // Начальная школа. – 1996. – № 6. – С. 28-30.
39. *Комарова В.А.* Формирование умения решать задачи в начальных классах // Начальная школа. – 2007. – № 1. – С. 66.
40. *Левенберг Л.Ш.* О графическом способе решения задач // Начальная школа. – 1973. – № 4. – С. 25-29.
41. *Левенберг Л.Ш.* Рисунки, схемы и чертежи в начальном курсе математики. – М., 1979. – 126 с.
42. *Левитас Г.Г.* Нестандартные задачи в курсе математики начальной школы // Начальная школа. – 2001. – №5. – С. 61-66.
43. *Левитас Г.Г.* Решение текстовых задач с помощью уравнений // Начальная школа. – 2001. – № 1. – С. 76-79.
44. *Линева Р.М.* Задания без числовых данных // Начальная школа. – 1995. – № 9. – С. 25-27.
45. *Марченко Т.В.* Занимательные задачи // Начальная школа.– 2000. – №5. – С.73-74.
46. *Марченко Т.В.* Час занимательной математики // Начальная школа. – 2000. – № 7. – С. 106-107.
47. *Матвеева Н.А.* Различные арифметические способы решения задач // Начальная школа. – 2001. – № 3. – С. 29-33.
48. *Математика:* учимся решать комбинаторные задачи: тетрадь к учебнику для 1-2 классов общеобразовательных учреждений / Н.Б. Истомина, Е.П. Виноградова. – 3-е изд. – Смоленск: Ассоциация XXI век, 2006. – 48 с.
49. *Математика:* учимся решать комбинаторные задачи: тетрадь к учебнику для 5 класса общеобразовательных учреждений / Н.Б. Истомина, З.Б. Редько. – Смоленск: Ассоциация XXI век, 2006. – 48 с.
50. *Махров В.Г.* Арифметические ребусы // Начальная школа. – 1992. № 5-6. С. 27-30.
51. *Медведева О.С.* Развитие комбинаторного стиля мышления // Математика в школе. – 1990. – № 1. – С. 49-51.
52. *Михайлов И.И.* Поисковые задачи по математике // Начальная школа. – 1982. – № 6. – С. 43-45.
53. *Мочалова О.Б.* Развитие логических способностей школьников. Учебно-методическое пособие для учителей и учащихся. – Казань, 1997. – 54 с.
54. *Музалева З.В.* Олимпиада по математике // Начальная школа. – 1990. – № 6. – С. 46-48.
55. *Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С.* Математическая шкатулка: Пособие для учащихся. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1988. – 160 с.
56. *Никифорова Е.Ю.* Активизация мыслительной деятельности в процессе работы над задачей // Начальная школа. – 2008. – № 8. – С. 45-50.
57. *Обучение младших школьников решению текстовых задач:* Сборник статей / Сост. Н.Б. Истомина, Г.Г. Шмырева. – Смоленск: Изд–во «Ассоциация XXI век», 2005. – 272 с.
58. *Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К.* Старинные занимательные задачи. М., 1999. – 190 с.
59. *Останина Е.Е.* Обучение младших школьников решению нестандартных арифметических задач // Начальная школа. – 2004. – № 7. – С. 36-44.
60. *Перельман И.*Я. Живая математика. – М., 1996. – 72 с.
61. *Перли С.С., Перли Б.С.* Страницы русской истории на уроках математики. – М., 1994. – 288 с.
62. *Пичугин С.С.* Графическое моделирование в работе над текстовой задачей // Начальная школа. – 2009. – № 5. – С. 41-45.
63. *Радченко В.П.* Способ подбора при решении задач // Начальная школа. – 1998. – № 11-12. – С. 61-62.
64. *Раков А.Ф., Розенберг А.Я.* Математические олимпиады учащихся // Начальная школа. – 1983. – № 6. – С. 62-64.
65. *Ризванова Х.Я.* Книга для внеклассного чтения по математике. – Уфа: Китап, 1998. – 176 с.
66. *Русанов В.* Математическая олимпиада для III класса // Начальная школа. – 1986. – № 6. – С. 23-25.
67. *Русанов В.Н.* Математический кружок младших школьников: Книга для учителя. – Оса: Росстани-на-Каме, 1994. – 144 с.
68. *Русанов В.*Н. Сборник задача математических олимпиад младших школьников. – Оса: Росстани-на-Каме, 1995. – 55 с.
69. *Салата М.В.* Олимпиады в IV классе // Начальная школа. – 2004. – № 5. – С. 62-64.
70. *Салахутдинова Р.А.* 300 лет Российскому флоту // Начальная школа. – 1996. – № 8. – С. 62-65.
71. *Свечников А.А., Сорокин П.И.* Числа, фигуры, задачи во внеклассной работе. – М., 1977. – 176 с.
72. *Селькина Л.В.* Решение нестандартных задач в начальном курсе математики как средство формирования субъекта учебной деятельности. – Пермь, 2001. – 197 с.
73. *Солнышко С.В.* Использование комбинаторных задач при обучении первоклассников математике // Начальная школа. – 2002. – № 6. – С. 61-65.
74. *Степанов В.Д.* Нестандартные задачи // Начальная школа. – 1981. – № 5. – С. 27-29.
75. *Степанова С.Ю.* Сборник задач по математике для учащихся I-III классов. – Ижевск, 1996. – 72 с.
76. *Сурикова С.В., Анисимова М.В.* Использование графовых моделей при решении задач // Начальная школа. – 2000. – № 4. – С. 56-62.
77. *Тихонова О.Е.* У истоков Петровского флота // Начальная школа. – 1997. – № 1. – С. 75-76.
78. *Труднев В.П.* Внеклассная работа по математике в начальной школе. – М., 1975. – 176 с.
79. *Фонин Д.С., Целищева И.М.* Моделирование как важное средство обучения решению задач // Начальная школа. – 1990. – № 3. – С. 33-37.
80. *Холодкова И.О.* Мосты старой Москвы // Начальная школа. – 1997. – № 1. – С. 49.
81. *Царева С.Е.* Виды работы с задачами на уроке математики // Начальная школа. – 1990. – № 10. – С. 37-42.
82. *Царева С.Е.* Нестандартные виды работы с задачами на уроке как средство реализации современных педагогических концепций и технологий // Начальная школа. – 2004. – № 4. – С. 49-56.
83. *Царева С.Е.* Обучение решению задач // Начальная школа. – 1997. – № 11. – С. 93-98.
84. *Царева С.Е.* Обучение решению задач // Начальная школа. – 1998. – № 1. – С. 102-107.
85. *Царева С.Е.* Проверка решения задачи и формирование самоконтроля учащихся // Начальная школа. – 1984. – № 2. – С. 31-35.
86. *Царева С.Е.* Различные способы решения задачи и различные формы записи решения // Начальная школа. – 1982. – № 2. – С. 39-42.
87. *Царева С.Е.* Различные способы решения текстовых задач // Начальная школа. – 1991. – № 2. – С. 78-84.
88. *Целищева И.И.* Моделирование в процессе решения текстовых задач // Начальная школа. – 1996. – № 3. – С. 32–36.
89. *Целищева И.И., Румянцева И.Б., Ермакова Е.С.* Обучение решению комбинаторных задач детей 4-10 лет // Начальная школа. – 2005. – № 11. – С. 83-90.
90. *Цукарь А.Я.* Задачи повышенной трудности // Начальная школа. – 1983. – № 6. – С. 64-67.
91. *Шадрина И.В.* Использование графических схем при работе над текстовыми задачами // Начальная школа. – 1995. – № 3. – С. 39-59.
92. *Шелехова Л.* Молодильные яблоки // Первое сентября: Математика. – 2006. – № 20. – С. 16.
93. *Шикова Р.Н., Петрушенко А.Д.* Использование задач с экологическим содержанием на уроках математики // Начальная школа. – 1998. – № 1. – С. 85-89.
94. *Шорникова И.В.* Некоторые виды работ по преобразованию задач // Начальная школа. – 1991. – № 11. – С. 21-25.