1. Нахождение процентов от числа

$$a\% \text{ от } b = \frac{b \cdot a}{100} = (0{,}01 \cdot a) \cdot b$$

$$18\% \text{ от } 45 = \frac{\cancel{45}^{9} \cdot \cancel{18}^{9}}{\cancel{100}_{10}} = 45 \cdot 0{,}18 = 8{,}1$$

2. Нахождение числа по его процентов

$$a\% \text{ числа равны } b \Rightarrow \text{исходное число} = \frac{b \cdot 100}{a} = b : (0{,}01 \cdot a)$$

$$18\% \text{ числа равны } 45 \Rightarrow \text{исходное число} \ \frac{\cancel{45}^{5} \cdot \cancel{100}^{50}}{\cancel{18}_{1}} = 45 : 0{,}18 = 250$$

Задача 1. Свежие фрукты содержат 80% воды, а высушенные – 28%. Сколько сухих фруктов получится из 288 кг свежих фруктов?

	Вода	«Сухое вещество»	Масса
Свежие фрукты	80%	20%	288 кг
Высушенные фрукты	28%	72%	? кг

При сушке фруктов вода испаряется, поэтому необходимо рассматривать не количество воды, а массу «сухого вещества», которое остается неизменным

1) Масса «сухого вещества» $= \dfrac{288 \cdot 20}{100} = 57{,}6$ кг.

2) Масса высушенных фруктов $= \dfrac{57{,}6 \cdot 100}{72} = 80$ кг.

Или масса высушенных фруктов $= \dfrac{288 \cdot 20 \cdot 100}{100 \cdot 72} = 80$ кг.

Задача 2. Первый сплав содержит 5% меди, второй – 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава.

Метод «стаканчиков»:

5%		13%		10%
x	+	$x+4$	=	$2x+4$

Пусть масса первого сплава x кг.

Тогда масса второго сплава $(x+4)$ кг, а масса третьего сплава $(2x+4)$ кг.

$$5x + 13(x+4) = 10(2x+4)$$

$$-2x = -12$$

$$x = 6$$

Масса третьего сплава $= 2 \cdot 6 + 4 = 16$ кг.

3. «Повышающий коэффициент»

Цена некоторого товара была S_0 руб. Какой стала цена товара после повышения цены на $r\%$?

Цена товара после повышения цены на $r\%$: $S = k \cdot S_0$, где $k = 1 + \frac{r}{100} = 1 + 0,01r$.

Задача 3. Цена некоторого товара была 1600 руб. Какой стала цена товара после повышения цены на 12%?

$k = 1 + \frac{12}{100} = 1 + 0,12 = 1,12.$

Цена товара после повышения цены: $S = 1,12 \cdot 1600 = 1792$ руб.

4. «Понижающий коэффициент»

Цена некоторого товара была S_0 руб. Какой стала цена товара после снижения цены на $r\%$?

Цена товара после снижения цены на $r\%$: $S = p \cdot S_0$, где $p = 1 - \frac{r}{100} = 1 - 0,01r$.

Задача 4. Цена некоторого товара была 1600 руб. Какой стала цена товара после снижения цены на 12%?

$p = 1 - \frac{12}{100} = 1 - 0,12 = 0,78.$

Цена товара после снижения цены: $S = 0,78 \cdot 1600 = 1248$ руб.

Задача 5. Цена некоторого товара была 1600 руб. сначала его цену повысили на 20%, а потом снизили на 10%. Какой стала цена товара после этих изменений? На сколько процентов изменилась начальная цена?

Повышение цены на 20%: $k = 1 + \frac{20}{100} = 1 + 0,2 = 1,2.$

Понижение цены на 10%: $p = 1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,1 = 0,9.$

Цена товара после этих изменений: $S = (1,2 \cdot 0,9) \cdot 1600 = 1,08 \cdot 1600 = 1728$ руб.

$1,08 = 1 + \frac{8}{100} \Rightarrow$ начальная цена увеличилась на 8%.

16.1 В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1400 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2120 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж в 2026 году?

Решение: $S_0 = 1400$ тыс. рублей – сумма кредита. Пусть в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг будет на X меньше долга на июль предыдущего года.

Год	**Остаток долга** на январь (*до увеличения на 10%*)	**Платежи**: уменьшение долга (*июль*)	**Платежи**: увеличение долга (*январь*)
2026	S_0	X	$\frac{1}{10}\cdot S_0$
2027	$S_0 - X$	X	$\frac{1}{10}\cdot(S_0 - X)$
2028	$S_0 - 2X$	X	$\frac{1}{10}\cdot(S_0 - 2X)$
2029	$S_0 - 3X$	X	$\frac{1}{10}\cdot(S_0 - 3X)$
2030	$S_0 - 4X$	X	$\frac{1}{10}\cdot(S_0 - 4X)$
2031	$S_0 - 5X$	$\frac{1}{5}(S_0 - 5X)$	$\frac{1}{10}\cdot(S_0 - 5X)$
2032	$\frac{4}{5}(S_0 - 5X)$	$\frac{1}{5}(S_0 - 5X)$	$\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{5}(S_0 - 5X)$
2033	$\frac{3}{5}(S_0 - 5X)$	$\frac{1}{5}(S_0 - 5X)$	$\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{5}(S_0 - 5X)$
2034	$\frac{2}{5}(S_0 - 5X)$	$\frac{1}{5}(S_0 - 5X)$	$\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{5}(S_0 - 5X)$
2035	$\frac{1}{5}(S_0 - 5X)$	$\frac{1}{5}(S_0 - 5X)$	$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}(S_0 - 5X)$

Сумма выплат (сумма кредита + % по кредиту):

$$S = S_0 + 6\cdot\frac{1}{10}S_0 + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}(4S_0 + 3S_0 + 2S_0 + S_0) - \frac{1}{10}\cdot(X + 2X + 3X + 4X + 5X) -$$

$$-\frac{1}{10}\cdot(4X + 3X + 2X + 1X) = S_0 + \frac{3}{5}S_0 + \frac{1}{5}S_0 - \frac{3}{2}X - X = S_0 + \frac{4}{5}S_0 - \frac{5}{2}X = \frac{9}{5}S_0 - \frac{5}{2}X \Rightarrow$$

$$\frac{9}{5}\cdot 1400 - \frac{5}{2}X = 2120 \Rightarrow X = 160 \text{ тыс. рублей.}$$

Платёж в 2026 году составит 160 + 140 = 300 тыс. рублей.

Ответ: 300 000 рублей

16.2 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 10 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годов долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;

– в июле 2030 года долг должен составлять 800 тыс. руб.;

– в июле 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;

Найдите начальную сумму кредита, если сумма выплат по кредиту равна 2090 тысяч рублей.

Решение: S_0 – сумма кредита.

Год	**Остаток долга** на январь (*до увеличения на 10%*)	**Платежи** уменьшение долга (*февраль – июнь*)	увеличение долга (*январь*)
2026	S_0	$\frac{S_0-800}{5}$	$\frac{1}{10}\cdot S_0$
2027	$S_0-1\cdot\frac{S_0-800}{5}=\frac{4S_0}{5}+1\cdot160$	$\frac{S_0-800}{5}$	$\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{4S_0}{5}+1\cdot160\right)$
2028	$S_0-2\cdot\frac{S_0-800}{5}=\frac{3S_0}{5}+2\cdot160$	$\frac{S_0-800}{5}$	$\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3S_0}{5}+2\cdot160\right)$
2029	$S_0-3\cdot\frac{S_0-800}{5}=\frac{2S_0}{5}+3\cdot160$	$\frac{S_0-800}{5}$	$\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{2S_0}{5}+3\cdot160\right)$
2030	$S_0-4\cdot\frac{S_0-800}{5}=\frac{S_0}{5}+4\cdot160$	$\frac{S_0-800}{5}$	$\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{S_0}{5}+4\cdot160\right)$
2031	800	160	$\frac{1}{10}\cdot800=80$
2032	640	160	$\frac{1}{10}\cdot640=64$
2033	480	160	$\frac{1}{10}\cdot480=48$
2034	320	160	$\frac{1}{10}\cdot320=32$
2035	160	160	$\frac{1}{10}\cdot160=16$

Сумма выплат (сумма кредита + % по кредиту):

$$S=S_0+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}\left(5S_0+4S_0+3S_0+2S_0+S_0\right)+\frac{1}{10}\cdot160\cdot(1+2+3+4)+16\cdot(5+4+3+2+1)=$$

$$=S_0+\frac{3}{10}S_0+160+240=\frac{13}{10}S_0+400\Rightarrow\frac{13}{10}S_0+400=2090.$$

$S_0=1300$ тыс. рублей – начальная сумма кредита.

Ответ: 1 300 000 рублей

16.3 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 700 тысяч рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– 15-го числа n-го месяца долг составит 300 тысяч рублей;
– к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Найдите n, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 755 тысяч рублей.

Решение: $S_0 = 700$ тыс. рублей – сумма кредита.

Месяц	**Остаток долга**	**Платеж**	
		уменьшение долга	*% на остаток долга*
1	S_0	$\frac{S_0-300}{n}$	$\frac{1}{100}\cdot S_0$
2	$S_0-\frac{S_0-300}{n}$	$\frac{S_0-300}{n}$	$\frac{1}{100}\cdot\left(S_0-\frac{S_0-300}{n}\right)$
3	$S_0-\frac{2\cdot(S_0-300)}{n}$	$\frac{S_0-300}{n}$	$\frac{1}{100}\cdot\left(S_0-\frac{2\cdot(S_0-300)}{n}\right)$
4	$S_0-\frac{3\cdot(S_0-300)}{n}$	$\frac{S_0-300}{n}$	$\frac{1}{100}\cdot\left(S_0-\frac{3\cdot(S_0-300)}{n}\right)$
5	$S_0-\frac{4\cdot(S_0-300)}{n}$	$\frac{S_0-300}{n}$	$\frac{1}{100}\cdot\left(S_0-\frac{4\cdot(S_0-300)}{n}\right)$
…		…	…
$n-1$	$S_0-\frac{(n-2)\cdot(S_0-300)}{n}$	$\frac{S_0-300}{n}$	$\frac{1}{100}\cdot\left(S_0-\frac{(n-2)\cdot(S_0-300)}{n}\right)$
n	$S_0-\frac{(n-1)\cdot(S_0-300)}{n}$	$\frac{S_0-300}{n}$	$\frac{1}{100}\cdot\left(S_0-\frac{(n-1)\cdot(S_0-300)}{n}\right)$
$n+1$	300	300	$\frac{1}{100}\cdot 300=3$

Сумма выплат (сумма кредита + % по кредиту):

$$S=S_0+n\cdot\frac{1}{100}S_0-\frac{1}{100}\cdot\frac{S_0-300}{n}(1+2+3+\ldots+n-1)+3=$$

$$=S_0+\frac{S_0\cdot n}{100}-\frac{(S_0-300)}{100\cdot n}\cdot\frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1)+3=S_0+\frac{S_0\cdot n}{100}-\frac{(S_0-300)\cdot(n-1)}{200}+3\Rightarrow$$

$$700+7n-2(n-1)+3=755$$

$$5n=50$$

$$n=10$$

Ответ: 10

Схема выплаты кредита равными выплатами

S_0 - сумма кредита, r – процент по кредиту, $k = 1 + \frac{r}{100}$.

Выплата	Остаток долга после выплаты	Выплата
1.	$kS_0 - X$	$X = kS_0$
2.	$k(kS_0 - X) - X$	$X = \frac{k^2 S_0}{k+1}$
3.	$k(k(kS_0 - X) - X) - X$	$X = \frac{k^3 S_0}{k^2 + k + 1}$
4.	$k(k(k(kS_0 - X) - X) - X) - X$	$X = \frac{k^4 S_0}{k^3 + k^2 + k + 1} = \frac{k^2 \left(k^2 S_0\right)}{\left(k^2 + 1\right)\left(k + 1\right)} = \frac{k^2}{k^2 + 1} \cdot \frac{k^2 S_0}{k+1}$

16.4 В сентябре планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по август каждого года необходимо выплачивать часть долга.

Найдите r, если известно, что при условии ежегодных выплат в размере 665500 рублей кредит будет полностью погашен за 4 года, а при условии ежегодных выплат в размере 1215500 рублей кредит будет полностью погашен за 2 года.

Решение: S_0 – сумма кредита, r – процент по кредиту, $k = 1 + \frac{r}{100}$.

X – ежегодная выплата, если кредит будет погашен за 4 года.

Y – ежегодная выплата, если кредит будет погашен за 2 года.

1. Схема выплаты кредита за 4 равных платежа

Год	Остаток долга на февраль - август
1.	$kS_0 - X$
2.	$k(kS_0 - X) - X$
3.	$k(k(kS_0 - X) - X) - X$
4.	$k(k(k(kS_0 - X) - X) - X) - X = 0 \Rightarrow X = \frac{k^4 S_0}{k^3 + k^2 + k + 1} = \frac{k^2(k^2 S_0)}{(k^2+1)(k+1)} = \frac{k^2}{k^2+1} \cdot \frac{k^2 S_0}{k+1}$

$$\frac{k^2}{k^2+1} \cdot \frac{k^2 S_0}{k+1} = 665500$$

2. Схема выплаты кредита за 2 равных платежа

Год	Остаток долга на февраль - август
1.	$kS_0 - Y$
2.	$k(kS_0 - Y) - Y = 0 \Rightarrow Y = \frac{k^2 S_0}{k+1}$

$$\frac{k^2 S_0}{k+1} = 1215500$$

Тогда $\frac{k^2}{k^2+1} \cdot 1215500 = 665500$, $\frac{k^2}{k^2+1} = \frac{665500}{1215500}$, $\frac{k^2}{k^2+1} = \frac{665500}{1215500} = \frac{121}{221}$, $k^2 = \frac{121}{100}$, $k = \frac{11}{10} = 1 + \frac{1}{10} = 1 + \frac{10}{100} \Rightarrow r = 10$.

Ответ: 10%

16.5 В октябре 2027 года Борис планирует взять кредит в банке на 7 лет в размере 2560 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
- в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на 15% от суммы долга на конец предыдущего года;
- в период с февраля по сентябрь необходимо выплатить часть долга
- в октябре каждого года в первые пять лет действия кредита (2028-2032 гг.) долг должен быть на одну и туже величину Q рублей меньше долга на октябрь предыдущего года;
- в 2033 и 2034 годах выплаты по кредиту равны;
- к октябрю 2034 года кредит должен быть погашен.

Найдите величину Q, если общая сумма выплат по кредиту должна составить 4168 тыс. рублей.

Решение: S_0 – сумма кредита, процент по кредиту $r = 15$, $k = 1 + \frac{r}{100} = \frac{23}{20}$. X – равные выплаты по кредиту в 2033 и 2034 годах.

Год	**Остаток долга** на январь (*до увеличения на 15%*)	**Платежи** уменьшение долга (*февраль - сентябрь*)	увеличение долга (*январь*)
2028	S_0	Q	$\frac{3}{20}\cdot S_0$
2029	$S_0 - Q$	Q	$\frac{3}{20}\cdot(S_0 - Q)$
2030	$S_0 - 2Q$	Q	$\frac{3}{20}\cdot(S_0 - 2Q)$
2031	$S_0 - 3\cdot Q$	Q	$\frac{3}{20}\cdot(S_0 - 3Q)$
2032	$S_0 - 4\cdot Q$	Q	$\frac{3}{20}\cdot(S_0 - 4Q)$

(остаток долга на январь 2033 год $S_0 - 5Q$)

Год	**Остаток долга** *на октябрь года*	**Платеж** *(с февраля по сентябрь)*
2033	$k(S_0 - 5Q) - X$	X
2034	$k(k(S_0 - 5Q) - X) - X = 0$	X

$$k(k(S_0 - 5Q) - X) - X = 0 \Rightarrow X = \frac{k^2(S_0 - 5Q)}{k+1} = \frac{529}{860}(S_0 - 5Q)$$

Сумма выплат: $S = 5Q + 2X + \frac{3}{20}\cdot(5S_0 - 10Q) = 5Q + \frac{1058}{860}\cdot(5S_0 - 5Q) = 5Q + \frac{1058}{860}\cdot(S_0 - 5Q) +$

$+\frac{3}{20}\cdot(5S_0 - 10Q) = \frac{1703}{860}S_0 - \frac{114}{43}Q = \frac{217984}{43} - \frac{114}{43}Q \Rightarrow \frac{217984}{43} - \frac{114}{43}Q = 4168$

$217984 - 114Q = 179224 \Rightarrow Q = 340$ тыс. рублей.

Ответ: 340 000 руб.

©А.С. Спешилов
учитель математики МАОУ «Средняя школа №27»
г. Петропавловск-Камчатский