Решение банковских задач в ходе подготовки к ЕГЭ по математике.

«Сейчас машиной не удивишь, сейчас удивишь отсутствием кредита» (русский фольклор).  
 Добрый день, уважаемые коллеги! В последние годы большую социальную значимость набирает  финансовая и экономическая грамотность молодёжи. Это и организованный Центральным банком Российской Федерации проект «Онлайн уроки финансовой грамотности», и   Всероссийский экономический диктант «Сильная экономика – процветающая Россия!»… Кроме того, Концепция математического образования призывает нас обеспечивать необходимое стране число выпускников, математическая подготовка которых достаточна для продолжения образования в различных направлениях и для практической деятельности, включая преподавание математики, математические исследования, работу в сфере информационных технологий и др.

Именно поэтому одной из особенностей вариантов ЕГЭ по математике профильного уровня  с  2015 году является включение практико-ориентированной задачи. Эта задача направлена на применение методов математики при решении содержательных и прикладных задач, в том числе  социально-экономического содержания. У учащихся при этом проверяется умение выполнять действия с целыми числами, действий со степенями с натуральным показателем, знаний и умений обращаться с процентами, в том числе и сложными «банковскими» процентами. Я расскажу сегодня как учу своих учеников решать банковские задачи (задание №17 профильного уровня).

В первую очередь знакомимся с **критериями оценивания** задачи №17.

|  |  |
| --- | --- |
| **Содержание критерия** | Баллы |
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Верно построена математическая модель,  решение сведено к исследованию этой модели  и получен результат:  — неверный ответ из-за вычислительной ошибки;  — верный ответ, но решение недостаточно обосновано | 2 |
| Верно построена математическая модель,  решение сведено к исследованию этой модели,  при этом решение может быть не завершено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев,  перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**Банковские задачи, которые встречаются на экзаменах, в основном двух видов:**

1.Выплаты по кредиту производят равными платежами.

2.Выплаты по кредиту производят так, что каждый месяц долг по кредиту уменьшается на одну и ту же величину, по сравнением с долгом на это же число предыдущего месяца.

Вспомним, как увеличить число Х на r %. Для этого надо найти r% от Х и полученное значение прибавить к числу Х то есть: Х + .

Удобно условие задачи оформить в виде таблицы. Для наглядности рассмотрим конкретные **задачи 1 вида.**

Задача 1*.*

*31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9282000 рублей в кредит под 10 % годовых. Схема выплат следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10 %), затем Алексей переводит в банк Х рублей. Какой должна быть сумма Х, чтобы Алексей выплачивает долг четырьмя равными платежами ( то есть за 4 года)?*

Решение.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг на начало месяца | Выплаты | Остаток долга на конец месяца |
| 1 | 1,1∙9282000=1021200 | Х | 10210200 −Х |
| 2 | 1,1∙(1021200−Х)=11231220 −1,1Х | Х | 11231220−2,1Х |
| 3 | 1,1∙(11231220−2,1Х)=12354342−2,31Х | Х | 123543342−3,31Х |
| 4 | 1,1∙(123543342−3,31Х)=13589776,2−3,641Х | Х | 0 |

*Получили уравнение: 13589776,2−3,641Х−Х=0*

*4,641Х=13589776,2*

*Х=2928200*

*Ответ: 2928200 рублей.*

Задача 2*.*

*В Июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:*

*-каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;*

*-с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 1,587млн рублей.*

*Сколько миллионов рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен двумя равными платежами ( то есть за два года)?*

Решение.

*Так как долг возрастает на 15% то есть увеличивается в 1,15 раз. Пусть Х миллионов рублей планируется взять в банке, тогда*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг на начало года | Выплаты | Остаток на конец года |
| 1 | *1,15Х* | *1,587* | *1,15Х−1.587* |
| *2* | *1,15∙(1,15Х−1,587)=1,3225Х−1,82505* | *1,587* | *0* |

*Получили уравнение: 1,3225Х−1,82505−1,587=0*

*1,3225Х =3,41205*

*Х=2,58*

*Ответ: 2,58млн рублей было взято в банке.*

Задача 3.

*Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заемщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го 2-го годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равный первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заемщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заемщика превысит 8млн рублей.*

Решение.

*Пусть Х(млн рублей) - наименьший размер кредита (Х, У – платежи в 3-й и 4-й годы, тогда*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг к середине года | Выплаты | Остаток на конец года |
| *1* | *Х+0,2Х* | *0,2Х* | *Х* |
| *2* | *Х+0,2Х* | *0,2Х* | *Х* |
| *3* | *Х+0,2Х* | *У* | *1,2Х−У* |
| *4* | *1,2∙(1,2Х−У)=1,44Х−1,2У* | *У* | *0* |

*Наименьшее целое значение Х=5.*

*Ответ: 5 000 000 рублей наименьший размер кредита.*

Задача 4.

*По бизнес-плану четырехлетний проект предполагает начальное вложение – 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 12% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме того, сразу после начислений процентов нужно дополнительные вложения: целое число n млн рублей и в1-й и во 2-й годы, а также целое число m млн рублей и в 3-й и 4-й годы. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года вырастут как минимум в полтора раза, и наименьшее значение m, такое, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.*

Решение.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | На начало года (млн руб.) | Вложения на конец года | Остаток на конец года |
| *1* | *1,12∙10=11,2* | *п* | *11,2+п* |
| *2* | *1,12∙(11,2+п)=12,544+1.12п* | *п* | *12,544+2,12п* |
| *3* | *1,12∙(12,544+2,12п)=14,04928+2,3744п* | *m* | *14,04928+2,3744п+т* |
| *4* | *1,12∙(14,04928+2,3744п+т)* | *т* | *15,7351936+2,659328п+2,12т* |

*n>1. Наименьшее целое значение п - 2.*

*т>4,219…. Наименьшее целое значение т - 5.*

*Ответ: п=2млн рублей, т=5млн рублей.*

Теперь рассмотрим решение задач **второго вида**. Здесь удобно взять таблицу не на 4, а на 5 колонок.

Задача 5.

*15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев).Условия его возврата таковы:*

*−1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;*

*−со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;*

*−15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.*

*На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит?(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)*

Решение.

*Пусть Х(рублей)-планируется взять в кредит на п месяцев, тогда -основной ежемесячный платеж. Так как перед п-м месяцем провели (п−1)выплат по , тогда на конец этого месяца осталось п−(п−1)∙=долга.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Месяцы | Долг на начало месяца | Выплаты | | Остаток на конец месяца |
| процентов | основной платеж |
| 1 | Х+0,01Х | 0,01Х |  |  |
| *2* |  |  |  |  |
| *3* |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| *п* | *+0,01∙* | *0,01∙* |  | *0* |

*Всего выплат за п месяцев составили:*

0,01Х+++…+*0,01∙+п∙∙=0,01Х∙(1++++…+)+Х*

*В скобках записана сумма п первых членов арифметической прогрессии. Её сумму можно найти по формуле =. Получаем (1+):2∙n =.Зная, что общая сумма после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Составим уравнение:*

*0,01Х∙*

*п=39.*

*Ответ: на 39 месяцев планируется взять в кредит.*

Задача 6.

*15-го января планируется взять кредит в банке на 26 месяцев. Условия его возврата таковы:*

*−1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;*

*−со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;*

*−15-го числа каждого месяца с1-го по 25-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;*

*−к 15 числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.*

*Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного погашения составляет 1924 тысячи рублей?*

Решение.

*Пусть Х(рублей)-планируется взять в кредит на 26 месяцев, тогда*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Месяцы | Долг на начало месяца | Выплаты | | Остаток на конец месяца |
| процентов | основной платеж |
| 1 | Х+0,03Х | 0,03Х | 40 | Х−40 |
| *2* | *(Х−40)+0,03∙(Х−40)* | *0,03∙(Х−40)* | *40* | *Х−80* |
| *3* | *(Х−80)+0,03∙( Х−80)* | *0,03∙( Х−80)* | *40* |  |
|  |  |  |  |  |
| *25* | *(Х−40∙24)+0.03∙(Х−40∙24)=(Х−960)+0,03∙(Х−960)* | *0,03∙(Х−960)* | *40* | *Х−1000* |
| *26* | *(Х-1000)+0,03∙(Х−1000)* | *0,03∙(Х−1000)* | *Х−1000* | *0* |

*Всего выплат за 26 месяцев составили:*

*0,03Х+0,03∙(Х−40) 0,03∙(Х−80)+ 0,03∙(Х−120)+…+ 0,03∙(Х−1000)+25∙40+Х−1000=0,03∙(Х+Х−40+Х−80+….+Х−1000)+Х−40.*

*В скобках записана сумма 26 первых членов арифметической прогрессии. Её сумму можно найти по формуле =. Получаем (Х+Х−1000):2∙26 =. Зная, что общая сумма после полного погашения кредита составляет 1924 тысячи. Составим уравнение:*

*0,03∙(26Х−13000)+Х−40=1924*

*Х=2314:1,78*

*Х=1300*

*Ответ: 1300тыс рублей планируется взять в кредит.*

Задача 7.

*15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 1400 тысяч рублей на 31 месяц. Условия его возврата таковы:*

*−1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;*

*−со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;*

*−15-го числа каждого месяца с1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;*

*− 15-го числу 30-го месяца долг составляет 500 тысяч рублей;*

*−к 15-му числу 31-го месяца долг должен быть полностью погашен.*

*Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения составляет 1989 тысячи рублей?*

Решение.

1. *1400-500=900(тыс руб)-погашение основного долга за 30 месяцев*
2. 900*:30=30(тыс руб.)-ежемесячное погашение основного долга.*
3. *1989-1400=589(ты сруб.)−выплаты процентов за 31 месяц.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Месяцы | Долг на начало месяца | Выплаты | | Остаток на конец месяца |
| процентов | основной платеж |
| 1 | 1400+∙1400 | ∙1400 | 30 | 1370 |
| *2* | *1370+*∙1370 | ∙1370 | *30* | *1340* |
| *3* | ∙1340 | ∙1340 | *30* | *1310* |
|  |  |  |  |  |
| *30* |  |  | *30* | *500* |
| *31* | *500+500∙* | *500∙∙* | *500* | *0* |

*∙1400++1340+…+500=589*

*∙(1400+1370+1340+…+500)=589*

*В скобках записана сумма 31 члена арифметической прогрессии, первый член которой равен 1400, а разность равна –30.*

*∙589; r=;*

*r=2*

*Ответ: 2%.*

Рационально познакомить учащихся с решением данных задач в 9 классе после изучения темы «Сумма *п* первых слагаемых арифметической прогрессии»

Когда ученики усвоят алгоритм решения этих задач, можно их познакомить с решением данных задач с применением формулы «сложных процентов»

Спасибо за внимание.