Целью работы является освоение теоретических аспектов комбинаторики, изучение применения комбинаторики в различных областях жизнедеятельности человека и подготовка к проведению просветительского мероприятия на тему «Комбинаторика вокруг нас».

Для достижения цели были поставлены и решены следующие задачи:

- рассмотрены основные понятия комбинаторики;

- изучены правила сложения и умножения в комбинаторике;

- освоено сочетания и размещения с повторениями и без повторений;

- проанализировано применение комбинаторики на шахматной доске

- рассмотрены пароли и коды в нашей жизни и их связь с комбинаторикой;

- проведен анализ общих знаний комбинаторики у студентов группы П-111 Белгородского правоохранительного колледжа имени Героя России В.В. Бурцева.

Человеку часто приходится иметь дело с задачами, в которых нужно подсчитать число всех возможных способов расположения некоторых предметов или число всех возможных способов осуществления некоторого действия. Разные пути или варианты, которые приходится выбирать человеку, складываются в самые разнообразные комбинации. И целый раздел математики, называемый комбинаторикой, занят поиском ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или другом случае.

В жизни общества большое место занимают азартные игры. Проблемы азартных игр и явились движущей силой развития комбинаторики.

Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Он составил таблицу, показывающую, сколькими способами могут выпасть р костей. Однако при этом не учитывалось, что одна и та же сумма очков может быть получена разными способами.

Со временем появились различные игры (нарды, карты, шашки, шахматы и т.д.). В каждой из этих игр приходилось рассматривать различные сочетания фигур, и выигрывал тот, кто их лучше изучил, знал выигрышные комбинации и умел избегать проигрышных. Не только азартные игры давали пищу для комбинаторных размышлений математиков. Еще с давних пор дипломаты, стремясь к тайне переписки, изобретали сложные шифры, а секретные службы других государств пытались эти шифры разгадать. Стали применять шифры, основанные на комбинаторных принципах, например, на различных перестановках букв с использованием ключевых слов и т. д.

Стали выходить журналы по комбинаторике, печататься книги, посвященные этой науке. Элементы комбинаторики находили отражение и в школьном курсе математики.

При выполнении исследовательского проекта была использована учебная литература и ресурсы Интернет.

Работа выполнена на 28 страницах машинописного печатного текста, содержит 3 таблицы и 7 рисунков.

1. Теоретическая часть

1.1 Что такое комбинаторика в математике

Комбинаторика (комбинаторный анализ) — раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисления элементов) и отношения на них (например, частичного порядка). Комбинаторика связана с другими областями математики — алгеброй, геометрией, теорией вероятностей и применяется в различных областях знаний (например, в генетике, информатике, статистической физике).

Иногда под комбинаторикой понимают более обширный раздел дискретной математики, включающий, в частности, теорию графов.

Разделы комбинаторики представлены на рисунке 1.

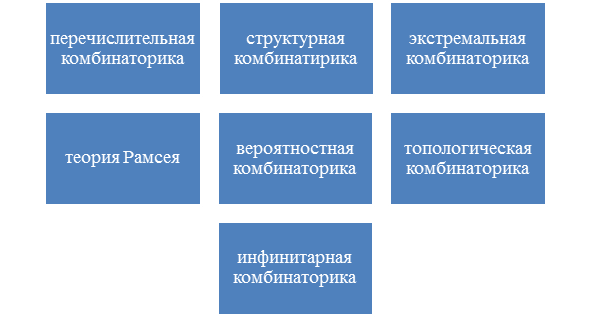


Рисунок 1 - Разделы комбинаторики

Перечислительная комбинаторика (или исчисляющая комбинаторика) рассматривает задачи о перечислении или подсчете количества различных конфигураций (например, перестановок) образуемых элементами конечных множеств, на которые могут накладываться определенные ограничения, такие как: различимость или неразличимость элементов, возможность повторения одинаковых элементов и т.п.

Количество конфигураций, образованных несколькими манипуляциями над множеством, подсчитывается согласно правилам сложения и умножения.

Типичным примером задач данного раздела является подсчет количества перестановок.

Структурная комбинаторика – это раздел комбинаторики к которому относятся некоторые вопросы теории графов. Теория графов — раздел дискретной математики, изучающий свойства графов. В общем смысле граф представляется как множество вершин (узлов), соединенных ребрами. В строгом определении графом называется такая пара множеств , где V есть подмножество любого счетного множества, а E - подмножество V×V.

Теория графов находит применение в геоинформационных системах (ГИС). Существующие или вновь проектируемые дома, сооружения, кварталы рассматриваются как вершины, а соединяющие их дороги, инженерные сети, линии электропередачи — как ребра. Применение различных вычислений, производимых на таком графе, позволяет найти кратчайший объездной путь или ближайший продуктовый магазин, спланировать оптимальный маршрут.

Примером раздела экстремальной комбинаторики может служить следующая задача: какова наибольшая размерность графа, удовлетворяющего определенным свойствам.

Теория Рамсея изучает наличие регулярных структур в случайных конфигурациях элементов. Примером утверждения из теории Рамсея может служить следующее:

- в группе из 6 человек всегда можно найти трех человек, которые либо попарно знакомы друг с другом, либо попарно незнакомы.

В терминах структурной комбинаторики это же утверждение формулируется так:

- в любом графе с 6 вершинами найдется либо клика, либо независимое множество размера 3 (рис. 2).

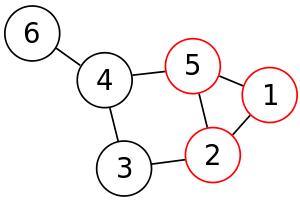


Рисунок 2 – Граф с кликой размера 3.

Кликой в неориентированном графе называется подмножество вершин, каждые две из которых соединены ребром графа

Вероятностная комбинаторика отвечает на вопросы вида: какова вероятность присутствия определенного свойства у заданного множества.

Топологическая комбинаторика применяет идеи и методы комбинаторики в топологии, при изучении дерева принятия решений, частично упорядоченных множеств, раскрасок графа и др.

Инфинитарная комбинаторика (англ.) — применение идей и методов комбинаторики к бесконечным (в том числе, несчетным) множествам.

Комбинаторика – ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов, – возникла в XVI в., но как наука стала развиваться в XVIII в. параллельно с возникновением теории вероятностей, так как для решения вероятностных задач необходимо было подсчитать число различных комбинаций элементов.

В историю зарождавшейся теории вероятностей вошла переписка заядлого игрока Шевалье де Мерэ с Пьером Ферма и Блезом Паскалем, где были затронуты несколько тонких комбинаторных вопросов. Помимо азартных игр, комбинаторные методы использовались (и продолжают использоваться) в криптографии — как для разработки шифров, так и для их взлома.

Блез Паскаль много занимался биномиальными коэффициентами и открыл простой способ их вычисления: «треугольник Паскаля» (рис. 3).

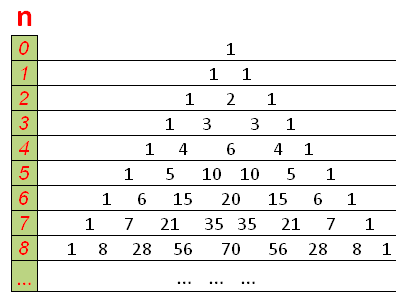


Рисунок 3 - Треугольник Паскаля

отя этот способ был уже известен на Востоке (примерно с X века), Паскаль, в отличие от предшественников, строго изложил и доказал свойства этого треугольника. Наряду с Лейбницем, он считается основоположником современной комбинаторики. Сам термин «комбинаторика» придумал Лейбниц, который в 1666 году (ему было тогда 20 лет) опубликовал книгу «Рассуждения о комбинаторном искусстве». Правда, термин «комбинаторика» Лейбниц понимал чрезмерно широко, включая в него всю конечную математику и даже логику. Ученик Лейбница Якоб Бернулли, один из основателей теории вероятностей, изложил в своей книге «Искусство предположений» (1713) множество сведений по комбинаторике.

В этот же период формируется терминология новой науки. Термин «сочетание» (combination) впервые встречается у Паскаля (1653, опубликован в 1665 году). Термин «перестановка» (permutation) употребил в указанной книге Якоб Бернулли (хотя эпизодически он встречался и раньше). Бернулли использовал и термин «размещение» (arrangement).

После появления математического анализа обнаружилась тесная связь комбинаторных и ряда аналитических задач. Окончательно комбинаторика как самостоятельный раздел математики оформилась в трудах Эйлера. Он детально рассмотрел, например, следующие проблемы:

- задача о ходе коня;

- задача о семи мостах, с которой началась теория графов;

- построение греко-латинских квадратов;

- обобщенные перестановки.

Кроме перестановок и сочетаний, Эйлер изучал разбиения, а также сочетания и размещения с условиями.

Задача, в которых идет речь о тех или иных комбинациях объектов, называются комбинаторными. Область математики, в которой изучаются комбинаторные задачи, называются комбинаторикой. Комбинаторику можно рассматривать как часть теории множеств – любую комбинаторную задачу можно свести к задаче о конечных множествах и их отображениях.

1.2 Основные понятия

https://fs.znanio.ru/8c0997/c0/5c/6b1614e108283fcc5cbedff1182e5a7d4d.png

n– факториал ‒ произведение первых n ‒ натуральных чисел (обозначается n!)

Для формулировки и решения комбинаторных задач используют различные модели комбинаторных конфигураций. Примерами комбинаторных конфигураций являются:

- размещение;

- перестановка;

- сочетание;

- композиция чисел;

- разбиение числа.

Размещением из n элементов по k называется упорядоченный набор из k различных элементов некоторого n-элементного множества.

https://fs.znanio.ru/8c0997/54/25/4d2c1bf6e8ff017bed312158ca1701c519.png

Перестановкой из n элементов называется всякий упорядоченный набор из этих элементов. Перестановка также является размещением из n элементов по n и вычисляется по формуле https://fs.znanio.ru/8c0997/31/0f/54e23cbfeaa6e81f4404f925675e3c765d.png

Сочетанием из n по k называется набор k элементов, выбранных из данных n элементов. Наборы, отличающиеся только порядком следования элементов, считаются одинаковыми, этим сочетания отличаются от размещений. https://fs.znanio.ru/8c0997/72/0a/6a722526b1a93b9cea3ec5d00608f3e9b1.png

Свойства сочетаний:

https://fs.znanio.ru/8c0997/e7/40/67101f94057833b1571f9e3d82ed25509a.png

https://fs.znanio.ru/8c0997/40/dd/84a5b9b879f76dc5d6523ca8668278811f.png

https://fs.znanio.ru/8c0997/01/b6/88e4860484e6409ef8d8b441f9976e8c82.png

https://fs.znanio.ru/8c0997/ca/ab/95b810ffb7d284fdc6bc9cfeec0fa8d49e.png

На рисунке 4 представлен алгоритм выбора формулы для вычисления количества комбинаций.

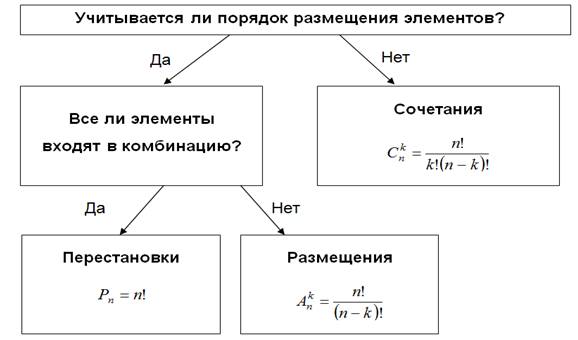


Рисунок 4 – Алгоритм выбора формулы при решении комбинаторных задач

Композицией числа n называется всякое представление n в виде упорядоченной суммы целых положительных чисел.

Разбиением числа n называется всякое представление n в виде неупорядоченной суммы целых положительных чисел.

1.3 Правила сложения и умножения в комбинаторике

Правило суммы гласит, что если два действия А и В взаимно исключают друг друга, причем действие А можно выполнить m способами, а В – n способами, то выполнить одно любое из этих действий (либо А, либо В) можно n + m способами.

Правило произведения. Пусть требуется выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n1 способами, второе действие n2 способами, третье – n3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить nk способами, то все k действий вместе могут быть выполнены: https://fs.znanio.ru/8c0997/3d/a2/0f5a8b17c90bce37e4b9be23003a8d6a85.png способами.

1.4 Сочетания и размещения с повторениями и без повторений

Классической задачей комбинаторики является задача о числе сочетаний без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать k из n различных предметов?

https://fs.znanio.ru/8c0997/5f/6d/e52f2cd0e888aa5bdbf88243e9cc372960.png

Пусть имеется множество N из n элементов. Всевозможные неупорядоченные подмножества из k элементов, составленные так, что любой элемент множества N может входить в эти подмножества от 1 до k раз, либо вообще отсутствовать, называются сочетаниями с повторением. Их число подсчитывают по формуле: https://fs.znanio.ru/8c0997/a3/41/1496f08c8ef46b6ea668cfd18c0294961b.png

Классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать и разместить по k различным местам k из n различных предметов?

https://fs.znanio.ru/8c0997/d1/93/07a5dbaaf89e7b834191e02ff1781c07ed.png

Также классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений с повторениями, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать и разместить по k различным местам k из n предметов, среди которых есть одинаковые?

https://fs.znanio.ru/8c0997/0d/1a/f655874ea965a7ae89fd684b81f0169217.png

Классической задачей комбинаторики является задача о числе перестановок без повторения, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно разместить n различных предметов на n различных местах?

https://fs.znanio.ru/8c0997/fc/a2/f631400b60e61ef185117fd66104a43270.png

Для случая, когда среди выбираемых n элементов есть одинаковые (выборка с возвращением), задачу о числе перестановок с повторениями можно выразить вопросом: сколькими способами можно переставить n предметов, расположенных на n различных местах, если среди n предметов имеются k различных типов (k <n), т. е. есть одинаковые предметы.

https://fs.znanio.ru/8c0997/a1/2d/593add04d53118e9a91960949b91b01a18.png

Решение комбинаторных задач

Задача №1. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

Решение.

1. Выбираю из 6 женщин работника на 4 рабочих места женской специальности.

https://fs.znanio.ru/8c0997/3d/eb/95e40e0ffebf29073c731d7897e552e92b.png

1. Выбираю из 8 мужчин работника на 6 рабочих мест мужской специальности.

https://fs.znanio.ru/8c0997/1b/de/5fb4fd3c691ed767487cf0d5fe4a6ade21.png

1. После решения 1-ого и 2-ого пункта остаются 2 женщины и 2 мужчины на оставшиеся 3 вакансии, которые могут занять 4 человека не зависимо от пола.

https://fs.znanio.ru/8c0997/01/33/ee0e24ce6cfd18d8e79245e3b2dc8b4309.png

1. 15\*28\*4=1680. Ответ: 1680 способов

Практическая часть

Анализ общих знаний комбинаторики

Для анализа общих знаний комбинаторики был проведен опрос студентов группы П-11.В качестве способа коммуникации с респондентами было выбрано анкетирование. Анкета для опроса приведена в приложении А. В опросе участвовало 15 человек из них 6 девушек (40%) и 9 парней (60%). Среди опрошенных студентов 3 человека (20%) в 17-тилетнем возрасте, 1 человек, которому 15 лет, остальным 11 (73%) - 16 лет.

Ответы, которые дали респонденты на вопросы о том какая оценка у них была в школе по математике и как они сами оценивают свои знания представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Ответы на третий и четвертый вопрос анкеты

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вопросы анкеты/ответы | 5 | 4 | 3 | 2 |
| Какая оценка по математике была у вас в школе? | 3 | 8 | 4 | - |
| 20% | 53% | 27% |  |
| Как вы сами оцениваете свои знания по математике? | 1 | 8 | 6 | 0 |
| 7% | 53% | 40% | 0% |

Пятым вопросом студентам было предложено из 3-х вариантов различных определений выбрать то, которое относится к комбинаторике. Результаты ответов представлены на рисунке 5.

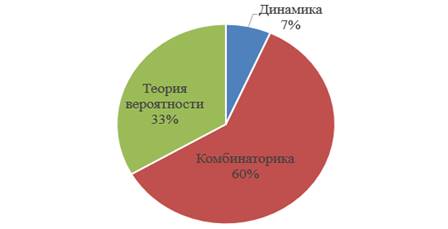


Рисунок 5 – Ответы студентов П-111 на пятый вопрос

В шестом вопросе респондентам были представлены четыре понятия и из этих понятий студентам необходимо было выбрать то которое относится к комбинаторике. Ответы на шестой вопрос представлены на рисунке 6, а определения всех понятий в таблице 3.

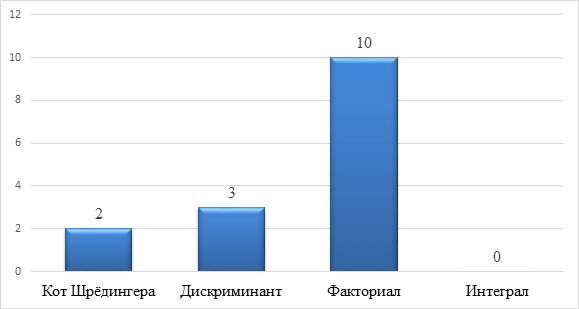


Рисунок 6 – Ответы на шестой вопрос

|  |  |
| --- | --- |
| Понятия | Определения |
| Кот Шрёдингера | Мысленный эксперимент, предложенный австрийским физиком-теоретиком, одним из создателей квантовой механики, Эрвином Шрёдингером, которым он хотел показать неполноту квантовой механики при переходе от субатомных систем к макроскопическим. |
| Дискриминант | Дискриминант квадратного трехчлена https://fs.znanio.ru/8c0997/ab/8e/3df7b7e0d2fb5fbb1160356c450d84da1a.png равен https://fs.znanio.ru/8c0997/b0/48/8febe375474a4d5b26f98efde4039fd550.png |
| Факториал | Функция, определенная на множестве неотрицательных целых чисел. https://fs.znanio.ru/8c0997/3a/d8/a0165711d483998c7fb19e0b81241d8e96.png |
| Интеграл | одно из важнейших понятий математического анализа, которое возникает при решении задач о нахождении площади под кривой, пройденного пути при неравномерном движении, массы неоднородного тела, и тому подобных, а также в задаче о восстановлении функции по ее производной |

Таблица 3 – Определения понятий, используемых в опросе

10 человек (67%) из предложенных формул выбрали формулу сочетания (https://fs.znanio.ru/8c0997/43/86/b59934f1b972fea6a178fd2e6f6b527512.png), которая относится к комбинаторике. 3 респондента (20%) ответили https://fs.znanio.ru/8c0997/d6/56/c9b8171326ce548ad122fa38443417fb30.png– периметр окружности, а двое выбрали формулу дискриминанта. Формулу корней квадратного уравнения (https://fs.znanio.ru/8c0997/e2/fa/23fc4bab4f86ee36d1e878577adbb25059.png) не выбрал ни один из респондентов.

60% опрошенных студентов смогли дать определение факториалу, 40% не смогли дать ответ.

Заключение

Исходя из данных полученных в ходе анализа общих знаний комбинаторики можно сделать вывод о необходимости проведения просветительских мероприятий на тему «Комбинаторика вокруг нас» среди студентов группы П-11.

В ходе данной работы была подготовлена презентация, в которой даны определения основным понятиям комбинаторики и рассмотрено применение комбинаторики в различных областях человеческой жизни.

Можно сделать вывод, что дальнейшее развитие комбинаторики и теории вероятностей необходимо для научного прогресса, который ведет к улучшению уровня жизни населения, а, значит, к тому, к чему стремится все человечество на протяжении десятков веков.