

ДОКЛАД

на тему:

ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Подготовил:
ученик 6 класса
Исаенко Данил

Проверил:
учитель математики
Малышева Е.А.

П. Шахта

2018 г.



Утверждаю:
директор школы
С.С. Каземирова

Ч. Дарвин считал, что обезьяну человеком сделал труд. Другие учёные считают, что человек стал им благодаря своим успехам в кодировании информации: благодаря изобретению языка, письменности и способов записи числовой информации.

Считать могут не только люди. Установлено, что считать до трёх могут и птицы (и многие другие животные). Если у птицы забрать из гнезда одно яйцо из пяти, то она не заметит пропажи, а вот если забрать одно из трёх, то птица начинает проявлять беспокойство. Но от такого элементарного счёта до понятия «число» ещё очень и очень далеко.

Долгое время после того, как появились названия чисел, люди их не записывали. Причина для этого была самая уважительная – они ещё не умели писать. Поэтому, если кому-нибудь надо было переслать другому человеку сведения, где участвовали числа, прибегали к зарубкам на дереве или на кости, к узелкам на верёвках, рисункам на мягкой глине и т. д. Такие знаки уже нельзя было перекладывать с места на место, убирать одни и добавлять другие. Вместо этого приходилось думать, мысленно выполнять операции над знаками. С этим ещё можно было мириться, пока учёт вёлся в пределах одного хозяйства, одной деревни. Но когда возникли государства, старые методы обозначения чисел стали негодными. Для записи больших чисел уже нельзя было обойтись ни зарубками на бирках (так на Руси называли палки, применяемые при счёте), ни узелками, ни глиняными фигурками.

Понятие о системах счисления

Системой счисления называют систему приёмов и правил, позволяющих устанавливать взаимно-однозначное соответствие между любым числом и его представлением в виде совокупности конечного числа символов. Множество символов, используемых для такого представления, называют *цифрами*. Различают два вида систем счисления: *позиционные* и *непозиционные*.

Позиционные и непозиционные системы счисления

В позиционных системах счисления одна и та же цифра может принимать разные значения в зависимости от номера разряда этой цифры в совокупности чисел, представляющих данное число.

Все слышали о римской нумерации. Она и сейчас часто используется для обозначения исторических дат (пишем, к примеру, XX век) или важных событий (скажем, XXV Олимпийские игры).

Попробуем перемножить в этой нумерации LXXXVIII и XXV (то есть 88 на 25), не переходя к привычной нам записи чисел. Это будет сделать очень непросто. А ведь 88 умножить на 25 можно и устно. И все это благодаря замечательному изобретению человечества – позиционной системе счисления. Познакомимся с ней поближе.

Начнем с простого. Рассмотрим три числа: 298, 829 и 982. Эти числа, разумеется, различны, хотя в их записи участвуют одни и те же цифры. Различаются же записи расположением цифр, иными словами, тем, какую позицию занимает та или иная цифра. Отсюда и пошло название такой нумерации – *позиционная*.

Позицию, которую занимает цифра, называют разрядом числа, единица каждого следующего разряда в 10 раз больше единицы предыдущего разряда. За это свойство нумерацию, которой мы обычно пользуемся, называют *десятичной*.

В истории человечества существовали и другие нумерации: двенадцатеричная (до сих пор посуду считают дюжинами), шестидесятеричная (60 секунд в минуте, 60 минут в часе). Победила десятичная. Может быть потому, что у человека обычно на руках было 10 пальцев, которые он и использовал для счета.

Если мы пользуемся десятичной позиционной нумерацией, то для записи любого (сколь угодно большого) числа нам достаточно иметь в распоряжении десять различных значков – цифр. Если бы мы пользовались пятеричной нумерацией, то нам бы хватило пяти цифр (ведь число «пять» изображается уже единицей следующего разряда, и в такой нумерации оно записывается как 10). Зато в двадцатеричной системе счисления потребовалось бы 20 цифр. Можно задуматься, на что намекает тот факт, что в нашем языке есть число одиннадцать, а нет сочетания десять один, хотя мы говорим двадцать один.

Главное же удобство позиционной нумерации состоит в том, что действия над числами в такой системе счисления выполняются поразрядно (так мы складываем и умножаем, вычитаем и делим многозначные числа в десятичной системе).

В *непозиционных* системах счисления цифры соответствуют некоторым фиксированным значениям. Такими нумерациями пользовались древние люди.

Системы счисления в древности

В языке туземцев островов Торрессова пролива всего два числительных: «урапун» и «окоза». И чисел у них всего лишь семь: «урапун», «окоза», «окоза-урапун», «окоза-окоза», «окоза-окоза-урапун», «окоза-окоза-окоза»,

«много». И не стоит над этим смеяться. Нетрудно привести примеры русских пословиц и поговорок, в которых слово «семь» тоже является синонимом слова «много». Например:

1. Сам не дерусь – семерых не боюсь.
2. Семеро одного не ждут.
3. Семеро по лавкам.
4. Семь бед – один ответ.
5. Семь вёрст до небес и всё лесом.
6. Семь пядей во лбу.
7. Семь раз отмерь – один раз отрежь.
8. Лук – от семи недуг и т. д.

Когда люди осознали, что чисел много, они стали изобретать способы записи чисел. Способ записи чисел называют нумерацией или, по-другому, системой счисления. У разных народов были разные нумерации.

Вавилонская нумерация

Первая позиционная система записи чисел появилась в Вавилоне. Единица в ней обозначалась клином , а десяток – знаком . Далее вавилоняне поступили почти так же, как это делаем сейчас мы (рис. 1). Эта запись означала три единицы высшего разряда (3 раза по 60), а дальше шло обозначение числа 25.

Поэтому на табличке записано число: $60 \cdot 3 + 25 = 205$.

Таблицу умножения вавилоняне никогда не запоминали, так как это было практически невозможно. При вычислениях использовались готовые таблицы умножения.

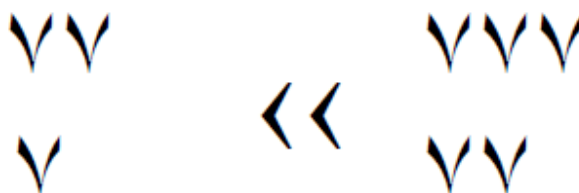


Рис. 1

Мнения историков по поводу того, как именно возникла эта система счисления, расходятся. Существуют две гипотезы. Первая исходит из того, что произошло слияние двух племён, одно из которых пользовалось шестеричной, другое – десятичной.

Шестидесятеричная система счисления в данном случае могла возникнуть в результате своеобразного политического компромисса. Суть второй гипотезы в

том, что древние вавилоняне считали продолжительность года равной 360 суткам, что естественно связано с числом 60. Отголоски использования этой системы счисления дошли до наших дней. Например, 1 час = 60 минут, 1 градус = 60 минут. В целом шестидесятеричная система счисления громоздка и неудобна.

Система вавилонян сыграла большую роль в развитии математики и астрономии, ее следы сохранились и до наших дней. Так, мы до сих пор делим час на 60 минут, а минуты на 60 секунд. Следуя примеру вавилонян, мы и окружность делим на 360 частей (градусов).

Египетская нумерация

Египтяне обозначали десяток знаком  (единицу они обозначали просто вертикальной чёрточкой , как это делаем и мы), десять десятков, то есть сотню – знаком . Появились знаки для тысячи – цветок лотоса, десятка тысяч – поднятый вверх палец, ста тысяч – сидящая лягушка и миллиона – человек с поднятыми руками.

Интересно, что делили и умножали древние египтяне совсем не так, как мы. Особую роль у них играло число *два* и его степени: 2, 4, 8, 16 и т. д. Умножение и деление проводилось путём последовательного удвоения чисел.

Пусть, например, надо умножить 19 на 94. Египтяне последовательно удваивали число 94, причём в правом столбце записывали результаты удвоения, а в левом – соответствующие степени двойки. (Разумеется, записывали они это по-своему, но суть дела от этого не меняется.)

1		94
2		188
4		376
8		752
16		1504

Удвоение продолжалось до тех пор, пока не оказывалось, что из чисел левого столбца можно составить множитель (в нашем случае $19 = 1 + 2 + 16$). Египтяне отмечали соответствующие строки вертикальными чёрточками и складывали те числа, которые стоят в этих же строках справа. В этом примере сложение трёх чисел $94 + 188 + 1504$ даёт искомое произведение 1786.

Деление египтяне проводили удвоением делителя. Допустим, нужно разделить 1786 на 19. В этом случае египтяне последовательно удваивали делитель до тех пор, пока числа правого столбца оставались меньше делимого:

1	19
2	38
4	76
8	152
16	304
32	608
64	1216

Затем из чисел правого столбца они пытались составить делимое, и если это удавалось, то сумма чисел в левом столбце давала частное. В данном случае делимое 1786 можно составить как $1216 + 304 + 152 + 76 + 38$, значит, частное будет $64 + 16 + 8 + 4 + 2 = 94$.

Если бы делимое не делилось без остатка на делитель, из чисел правого столбца удалось бы составить лишь число, меньшее делимого. Так получились бы и частное, и остаток.

Один из недостатков египетской нумерации – невозможность записи больших чисел без придумывания новых иероглифов. Иероглиф для десяти миллионов ещё есть, а вот для ста уже нет. Этот недостаток преодолён в позиционных системах счисления.

Римская нумерация

Среди множества иероглифических систем счисления, которые существовали в разные времена у разных народов, только одна используется до сих пор. Её цифры знакомы всем, хотя им уже около 2,5 тысячелетий. Эти цифры встречаются на циферблатах часов, фронтонах старинных и современных зданий, памятниках, страницах книг. Конечно же, речь идёт о римской системе счисления.

Нельзя сказать, что время совсем не коснулось облика римских цифр. Если бы житель Древнего Рима захотел прочитать число, обозначающее дату открытия станции метро «Римская» в Москве, то он оказался бы в неимоверном затруднении. Причина в том, что только знаки I, V и X с течением времени не претерпели никаких изменений. Другие же цифры в древности изображались иначе.

Учёные предполагают, что первоначально иероглиф для числа 100 имел вид пучка из трёх чётрочек, наподобие русской буквы Ж, а для числа 50 – вид верхней половинки этой буквы. В дальнейшем последний иероглиф постепенно трансформировался в знак L:



А число 100 стали обозначать буквой С (от начальной буквы латинского слова *centum* – «сто»).

Символы для чисел 500 и 1000 также прошли длительную эволюцию. А используемые сейчас знаки D и M произошли от начальных букв латинских слов *demimille* – «половина тысячи», «пятьсот» и *mille* – «тысяча».

Возникает вопрос: как читать римские цифры? Одно из правил записи римских чисел гласит: «Если большая цифра стоит перед меньшей, то они складываются, если же меньшая стоит перед большей (в этом случае меньшая цифра не может повторяться), то меньшая вычитается из большей».

Например: VII = 5 + 1 + 1 = 7; IX = 10 – 1.

Пользуясь этим правилом, можно рассчитать, в каком году открылась станция метро «Римская»: MCMXCV = 1000 + (1000 – 100) + (100 – 10) + 5 = 1995.

В наши дни любую из римских цифр запрещается записывать в одном числе более трёх раз подряд. Поэтому выражения VIII, XXXX и т. п. считаются некорректными. Однако древние римляне о подобном ограничении ничего не ведали и число 1995 скорее всего записали бы так: MDCCCCLXXXV.

Только что мы столкнулись с любопытным феноменом в «обществе» римских чисел: разрешив цифрам-кирпичикам при «сборке» не только складываться, но и вычитаться, мы тем самым лишили римские числа одного из важных математических свойств – единственности представления. Что теперь мешает, например, записать дату открытия станции метро «Римская» как MVM или MDVD или ещё несколькими другими способами?

Если рассмотреть множество старинных и современных надписей римскими цифрами, можно убедиться, что авторы, старательно скомпоновавшие эти цифры в числа, придерживались каких-то негласных правил. Но единых и чётких принципов записи римских чисел до сих пор так и не выработано. Существуют лишь интересные предложения. Так, современный американский учёный Стивен Шварцман предлагает международный стандарт римских чисел (ISRN – International Standart Roman Numerals), в основе которого должны лежать специально подобранные им 6 правил. Для того чтобы записывать числа в соответствии с этим стандартом, нужно воспользоваться таблицей 1.

Табл. 1

ОБОЗНАЧЕНИЕ ЧИСЕЛ РИМСКИМИ ЦИФРАМИ

Единицы		Десятки		Сотни		Тысячи	
1	I	10	X	100	C	1000	M
2	II	20	XX	200	CC	2000	MM
3	III	30	XXX	300	CCC	3000	MMM
4	IV	40	XL	400	CD		
5	V	50	L	500	D		
6	VI	60	LX	600	DC		
7	VII	70	LXX	700	DCC		
8	VIII	80	LXXX	800	DCCC		
9	IX	90	XC	900	CM		

Эта таблица позволяет обозначить любое число от 1 до 3999. Сначала нужно записать число как обычно, в десятичной системе, а затем для цифр, стоящих в разрядах тысяч, сотен, десятков и единиц, подобрать соответствующую кодовую группу. Например, вот так будет выглядеть число 3999: MMMCMXCIX.

Алфавитные нумерации

Алфавитные системы счисления представляют особую группу. В них для записи чисел использовался буквенный алфавит. Примером алфавитной системы счисления является *славянская*. У одних славянских народов числовые значения букв устанавливались в порядке следования букв славянского алфавита, у других, в частности у русских, роль цифр играли не все буквы, а только те, которые имеются в греческом алфавите. Над буквой, обозначающей цифру, ставился специальный знак – «титло» (отсюда – «число»). Славянская система счисления сохранилась в богослужебных книгах.

Алфавитная система счисления была распространена у древних армян, грузин, греков (ионическая система счисления), арабов, евреев и других народов Ближнего Востока.

Двенадцатеричная система счисления

В древности довольно широкое распространение имела двенадцатеричная система. Её происхождение связано со счётом на пальцах, а именно: так как 4 пальца руки (кроме большого) имеют вместе 12 фаланг, то по этим фалангам,

перебирая их по очереди большим пальцем, и ведут счёт от 1 до 12. Затем 12 принимается за единицу следующего разряда и т. д. В устной речи остатки двенадцатеричной системы сохранились и до наших дней: вместо того, чтобы сказать «двенадцать» мы говорим слово «дюжина». Многие предметы (ножи, вилки, тарелки, носовые платки) очень часто считают именно дюжинами, а не десятками. Так, например, сервиз бывает, как правило, на 12 или 6 человек и гораздо реже на 10 или на 5. Сейчас уже почти не встречается слово «гросс», означающее «дюжину дюжин» (то есть единицу третьего разряда в 12-ичной системе), но ещё несколько десятков лет тому назад оно было довольно широко распространено, особенно в торговом мире. Дюжина grossов называлась «масса». Сейчас такое значение слова «масса» редко кому известно, хотя, возможно, именно в нём лежит корень таких употребительных выражений, как «масса дел», «масса людей». Остатки двенадцатеричной системы есть у англичан – в системе мер (1 фут = 12 дюймам), и в денежной системе (один шиллинг = 12 пенсам).

Числа в английском языке от одного до двенадцати имеют свое название, последующие числа являются составными. Для чисел от 13 до 19 используется окончание слов – *teen*. Например, 15 – *fifteen*.

С математической точки зрения двенадцатеричная система имела бы, возможно, преимущества перед десятичной, так как число 12 делится на 2, 3, 4 и 6, а число 10 только на 2 и на 5.

Табл. 2

ДВЕНАДЦАТЕРИЧНЫЕ ЦИФРЫ У АНГЛИЧАН

Число	Английское название
1	One
2	Two
3	Three
4	Four
5	Five
6	Six
7	Seven
8	Eight
9	Nine
10	Ten
11	Eleven

12	Twelve
----	--------

Индийская нумерация

Та нумерация, которой мы сейчас пользуемся, возникла примерно 1500 лет назад в Индии. Это не значит, что индийские цифры имели с самого начала современный вид. В течение многих столетий, переходя от народа к народу, старинные индийские цифры много раз изменялись, пока приняли современную форму.

Арабы заимствовали у индийцев цифры и позиционную десятичную систему, которые европейцы потом заимствовали у арабов и стали называть *арабскими*, хотя правильнее бы их было называть *индийскими*.

Современные системы счисления

В современном мире используются чаще всего позиционные системы счисления. В каждой такой системе высшая цифра, какая может понадобиться, равна основанию этой системы без единицы. Например, в десятичной системе высшая цифра – 9, в шестеричной – 5, в троичной – 2, в пятнадцатеричной – 14 и т. д.

Самая простая система счисления – та, для которой требуется меньше всего цифр. В десятичной системе нужны 10 цифр (начиная с 0), в пятеричной – 5 цифр, в троичной – 3 цифры (1, 2 и 0), в двоичной – только 2 цифры (1 и 0).

Существует и *единичная* система счисления – такая система, в которой единицы всех разрядов имеют одинаковое значение. Это самая примитивная система, ею пользовался первобытный человек. Но между ней и всеми другими системами счёта есть очень большая разница: она лишена главного преимущества нашей нумерации – так называемого поместного значения цифр. В единичной системе счисления, знак, стоящий на 3-м или 5-м месте, имеет то же значение, что и стоящий на первом месте. Для изображения какого-нибудь числа по «единичной» системе нужно ровно столько же знаков, сколько было сосчитано предметов: чтобы записать сто предметов нужно сто знаков, в двоичной же – только семь (1100100), а в пятеричной – всего три (400).

Вот почему «единичную» систему нельзя поставить рядом с остальными, так как она принципиально от них отличается, не давая никакой экономии в изображении чисел. Если же ее «откинуть», то простейшей системой счисления нужно признать систему *двоичную*, в которой употребляются всего две цифры: 1 и 0. При помощи единицы и нуля можно изобразить все бесконечное множество чисел. На практике система эта мало удобна – получаются слишком длинные числа; но теоретически она имеет полное право считаться простейшей. Она обладает некоторыми любопытными особенностями, присущими только ей одной. В этой нумерации очень просто выглядят таблицы сложения и

умножения:

$$0 + 0 = 0 \quad 1 + 0 = 1 \quad 0 + 1 = 1 \quad 1 + 1 = 10 \quad 0 \cdot 0 = 0 \quad 1 \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot 1 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1$$

Конечно, в двоичной системе запись числа будет почти всегда длиннее, чем в десятичной. Посмотрим, например, на запись первых шестнадцати чисел:

Табл. 3

Десятичная система	Двоичная система	Десятичная система	Двоичная система
1	1	9	1001
2	10	10	1010
3	11	11	1011
4	100	12	1100
5	101	13	1101
6	110	14	1110
7	111	15	1111
8	1000	16	10000

Двоичная система имеет большое значение в работе различных электронных устройств (например, компьютера). Правда, вопреки распространённому заблуждению, двоичная система была придумана не инженерами – конструкторами электронно-вычислительных машин, а математиками и философами задолго до появления компьютеров, ещё в XVII–XIX вв. Великий немецкий учёный Лейбниц считал: «Вычисление с помощью двоек... является для науки основным и порождает новые открытия. При сведении чисел к простейшим началам, каковы 0 и 1, везде появляется чудесный порядок». Позже двоичная система была забыта, и только в 1936–1938 гг. американский инженер и математик Клод Шеннон нашёл замечательные применения двоичной системы при конструировании электронных схем.

В восьмеричной системе счисления используется восемь цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Она употребляется в ЭВМ как вспомогательная для записи информации в сокращённом виде. Для представления одной цифры восьмеричной системы используется три двоичных разряда (триада) (см. таблицу 4).

Для изображения чисел в шестнадцатеричной системе счисления употребляется 16 цифр. Первые десять цифр этой системы обозначаются цифрами от 0 до 9, а старшие шесть цифр – латинскими буквами: 10-А, 11-В, 12-С, 13-Д, 14-Е, 15-F. Шестнадцатеричная система используется для записи информации в сокращённом виде. Для представления одной цифры шестнадцатеричной системы счисления используется четыре двоичных разряда (тетрада) (см. таблицу 4).

Позиционные системы счисления могут иметь различные основания (натуральные числа, большие 1). Рассмотрим, например, как записываются числа в пятеричной системе.

Изобразим число 119 в пятеричной системе. Делим 119 на 5, чтобы узнать, сколько в нем единиц первого разряда: $119 : 5 = 23$, остаток 4.

Это значит, простых единиц будет 4. Далее, 23 пятерки не могут стоять все во втором разряде, так как высшая цифра в пятизначной системе – 4, и больше 4 единиц ни в одном разряде быть не должно. Делим поэтому 23 на 5: $23 : 5 = 4$, остаток 3.

Это показывает, что во втором разряде (пятерок) будет цифра 3, а в третьем (двадцатипятерок) – 4. Итак, $119 = 4 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 4$, или в пятеричной системе «434».

Выполненные действия для удобства располагают так: полученные цифры выписывают справа налево. Так же можно изображать числа в троичной, семеричной, двенадцатеричной, двадцатеричной, шестидесятеричной и других позиционных системах счисления.

Табл. 4

НАИБОЛЕЕ ВАЖНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

2-ичная (основание 2)	Восьмеричная (основание 8)		Десятичная (основание 10)	Шестнадцатеричная (основание 16)	
	8-ичные цифры	2-ичные триады		16-ичные цифры	2-ичные тетрады
0	0	000	0	0	0000
1	1	001	1	1	0001
	2	010	2	2	0010
	3	011	3	3	0011
	4	100	4	4	0100
	5	101	5	5	0101
	6	110	6	6	0110
	7	111	7	7	0111
			8	8	1000
			9	9	1001
				A	1010
				B	1011
				C	1100
				D	1101

2-ичная (основание 2)	Восьмеричная (основание 8)		Десятичная (основание 10)	Шестнадцатеричная (основание 16)	
	8-ичные цифры	2-ичные триады		16-ичные цифры	2-ичные тетрады
				E	1110
				F	1111

Литература

1. Глейзер, Г. И. История математики в школе, IV–VI классы. Пособие для учителей. – М. : Просвещение, 1981.
2. Кушниренко, А. Г. Кодирование чисел // Информатика. – 1997. – № 23. – с. 7–9.
3. Перельман, Я. И. Живая математика. Математические рассказы и головоломки. – М. : Триада-литера, 1994.
4. Петерсон, Л. Г. Математика, 2 класс. Ч. 3. – М. : Компания С-Инфо ЛТД, «Баллас», 1996.
5. Фомин, С. В. Системы счисления. – М. : Наука, 1975.
6. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика. – М. : Аванта +, 2003.