Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение Самарской области
основная общеобразовательная школа имени воина-интернационалиста С.Н. Левчишина
с. Чёрновка муниципального района Кинель-Черкасский Самарской области

Секция математики, информатики и физики

«Последовательности и прогрессии в жизни»

Учитель математики
Данилов Сергей Романович

с. Чёрновка

Оглавление

Введение

Математика всегда была неотъемлемой и существеннейшей составной частью человеческой культуры, она является ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса и важной компонентой развития личности.
Математика встречается и используется в повседневной жизни, следовательно, определенные математические навыки нужны каждому человеку.
В 9 классе мы начинаем изучать числовые последовательности. Изучили арифметическую и геометрическую прогрессии: дали определение, научились находить по формулам любой член прогрессии, сумму первых членов прогрессии.
Найдя ответы на вопросы: имеет ли это, какое - либо практическое значение и как давно люди знают последовательности, как возникло это понятие, мы подтвердим или опровергнем утверждение о том, что математика - наука очень древняя и возникла она из практических нужд человека, что алгебра является частью общечеловеческой культуры.
Объектом исследования: геометрическая и арифметическая прогрессии.
Предмет исследования: практическое применение прогрессий.
***Гипотеза исследования*:** если математика - наука очень древняя и возникла она из практических нужд человека, то и прогрессии имеют определенное практическое значение.
Цель исследования: установить картину возникновения понятия прогрессии и выявить примеры их применения.
Задачи исследования:

1. Выяснить:

- когда и в связи, с какими потребностями человека появилось понятие последовательности, в частности - прогрессии;
- какие ученые внесли большой вклад в развитие теоретических и практических знаний по изучаемой проблеме;
- теоретические основы геометрической и арифметической прогрессий.

2. Установить: имеют ли арифметическая и геометрическая прогрессии прикладное значение? Найти примеры применения прогрессий в нашей жизни.

Методы исследования:

- анализ школьных учебников математики, математической, справочной литературы, литературы по истории математики, материала из Интернета;

- обобщение найденных фактов в учебниках по биологии, по экологии, по экономики и в медицинских справочниках.

В данной работе, мы отразим применение прогрессий в повседневной жизни, и покажем, что алгебра является частью общечеловеческой культуры.

Глава 1. Теоретические основы арифметической и геометрической прогрессий

1.

1. *История возникновения арифметической и геометрической прогрессий*

Понятие числовой последовательности возникло и развилось задолго до создания учения о функции. Так еще в III в. до н. э. александрийский ученый Эратосфен указал способ получения *n*-го члена последовательности простых чисел. Этот способ был назван «решетом Эратосфена».

Идея предела последовательности восходит к V-IV вв. до н. э. Прогрессии - частные виды числовых последовательностей - встречаются в памятниках II тысячелетия до н.э. [1].

В клинописных табличках вавилонян, как и в египетских папирусах, относящихся ко II тысячелетию до н.э., встречаются примеры арифметических и геометрических прогрессий. Например, вавилонская задача, в которой используется арифметическая прогрессия: « 10 братьев, мины серебра. Брат над братом поднимается, на сколько поднимается, не знаю. Доля восьмого 6 шекелей. Брат над братом - на сколько он выше?»

При решении вавилонский автор, не имевший в своем распоряжении ни современной символики, ни готовых формул, вынужден придержаться строго арифметических рассуждений. Идея его решения следующая. Он начинает с нахождения средней арифметической (средней доли), деля мины на 10 и получая мины, ее умножает затем на два. Итак, удвоенная средняя доля есть мины. Это и есть сумма долей третьего и восьмого братьев, имея в виду, что первого от третьего, как и восьмого от десятого отделяют 2 ступени (интервала). Третьего же от восьмого отделяют 5 ступеней, а разность между их долями составляет мины. Отсюда и находится значение одной ступени, т.е. разность прогрессии, равная от мины, или мины. [1].

А вот, например, задача из египетского папируса Ахмеса: «Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 человеками и, разность же между каждым человеком и его соседом равна меры» [1].

Задачи на арифметические (и геометрические) прогрессии имеются и в древнекитайском трактате «Математика в девяти книгах», в котором нет, однако, указаний на применение какой-либо формулы суммирования. По содержанию некоторые китайские задачи трактуют о растущей или убывающей производительности труда ткачих. Примеры арифметических и геометрических прогрессий имеются и в индийских «сиддхантах».

В древнерусском юридическом сборнике «Русская правда» содержатся выкладки о приплоде от скота и пчел за известный промежуток времени, о количестве зерна, собранного с определенного участка земли, и т.д.

Таким образом, первые задачи дошедшие да нас на прогрессии связаны с запросами хозяйственной жизни и общественной практики, как например, распределение продуктов, деление наследства, приплод скота, наблюдениями над явлениями природы и т.д.

Однако, слово «прогрессия» имеет латинское происхождение (progression, что означает «движение вперед») в первые встречается у римского автора Боэция (V-VI в.). Первоначально под прогрессией понимали всякую числовую последовательность чисел, построенную по такому закону, который позволяет неограниченно продолжать эту последовательность в одном направлении. В конце средних веков и в начале нового времени это термин перестает быть общеупотребительным. В XVII в., например, ДЖ. Грегори употребляет вместо прогрессии термин «ряд», а другой видный английский математик, Дж. Валлис, применяет для бесконечных рядов термин «бесконечные прогрессии».

Некоторые формулы, относящиеся к прогрессиям, были известны китайским и индийским ученым. Так, Ариабхатта (V в.) знал формулы общего члена, суммы арифметической прогрессии и др. Магавира (IX в.) пользуется формулой суммы квадратов натуральных чисел

и другими более сложными конечными рядами. Однако правило для нахождения суммы членов произвольной арифметической прогрессии впервые встречается в «Книге абака» (1202 г.) Леонардо Пизанского (Фибоначчи). В «Науке о числах» (1484 г.) Н. Шюке, как и Архимед, сопоставляет арифметическую прогрессию любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Формула для суммирования бесконечно убывающей геометрической прогрессии была известна П. Ферма и другим математикам XVII в.[1]

В настоящее время прогрессии рассматриваются, как частные случаи числовых последовательностей.

1. **2. Арифметическая и геометрическая прогрессии**

В толковом словаре понятия арифметической и геометрической прогрессии даются следующим образом:

Арифметическая прогрессия - это последовательность чисел, каждое из которых получается из предыдущего путем прибавления или вычитания некоего постоянного числа.

Геометрическая прогрессия - это последовательность чисел, каждое из которых получается из предыдущего путем умножения или деления на некое постоянное число [4].

В школьном курсе «Алгебра» 9 класс по редакцией А.Г. Мордкович, понятия геометрической и арифметической прогрессии дается следующим образом:

Определение. Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа *d*, называют *арифметической.* При этом число *d* называют *разностью* прогрессий.

Очевидно, что арифметическая прогрессия является возрастающей последовательностью, если , и убывающей, если .

Формула n-члена арифметической прогрессии.

Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Каждый член арифметической прогрессии, кроме первого (и последнего - в случае конечной прогрессии), равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов.

Верно и обратное: если последовательность такова, что для любого выполняется равенство

то - арифметическая прогрессия.

Теорема: Числовая последовательность является арифметической тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего - в случае конечной последовательности), равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов.

Определение. Числовую последовательность, все члены которой отличны от нуля и каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением его на одно и то же число *q*, называют *геометрической* прогрессией. При этом число *q* называют *знаменателем* прогрессии.

Формула n-го члена геометрической прогрессии.

Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, первого (и последнего - в случае конечной последовательности), равен произведению предшествующего и последующего членов.

Верно и обратное: если последовательность такова, что для любого выполняется равенство

то - геометрическая прогрессия.

Теорема: Числовая последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого ее члена, кроме первого (и последнего - в случае конечной последовательности), равен произведению предшествующего и последующего членов.

[2].

Таким образом, в первой главе нами было выяснено, когда и в связи, с какими потребностями человека появилось понятие последовательности, в частности - прогрессии; какие ученые внесли большой вклад в развитие теоретических и практических знаний по изучаемой проблеме; рассмотрены теоретические основы геометрической и арифметической прогрессий.

Глава 2. Арифметические и геометрические прогрессии в нашей жизни

1.

1. ***Арифметические и геометрические прогрессии в окружающей нас жизни***

Первые задачи, дошедшие да нас на прогрессии, были связаны с запросами хозяйственной жизни и общественной практикой. Так и в наше время формулы арифметической и геометрической прогрессии используются при подсчёте данных в программировании, экономике, химии, литературе, физике, биологии, геометрии, экономике, статистике, а также и в повседневной жизни. Рассмотрим примеры применения более подробно:

1. Химия: при повышении температуры по арифметической прогрессии скорость химической реакций растёт по геометрической прогрессии. При повышении температуры от +20 до + 60 градусов, скорость реакции увеличивается в 150 раз;
2. Физика: нейтрон, ударяя по ядру урана, раскалывает его на 2 части, получаются 2 нейтрона. Затем 2 нейтрона, ударяя по двум другим ядрам, раскалывают их ещё на 4 части и т.д. - это геометрическая прогрессия;
3. Литература: даже в литературе мы встречаемся с математикой. Так, вспомним строки из «Евгения Онегина».

…Не мог он ямба от хорея,
Как мы не бились отличить…

Ямб - это стихотворный размер с ударением на чётных слогах 2,
4, 6, 8… . Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью прогрессии 2.

«Мой дЯдя сАмых чЕстных прАвил…» (А.С.Пушкин)

Прогрессия 2, 4, 6, 8…

«Так бей, не знай отдохновенья,
Пусть жила жизни глубока:
Алмаз горит издалека -
Дроби, мой гневный ямб, каменья!» (И. Блок)

Прогрессия 2,4,6, 8, 10,12…

Хорей - это стихотворный размер с ударением на нечётных слогах стиха. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию 1, 3, 5, 7…

«Я пропАл , как звЕрь в загОне…» (Б.Л.Пастернак)

Прогрессия 1, 3, 5, 7…

Листья падают в саду…
В этот старый сад, бывало,
Ранним утром я уйду
И блуждаю, где попало. (И.Бунин) [10].

4. Биология: в микробиологии также работают законы математики. Так, микроорганизмы размножаются делением пополам. При наличии благоприятных условий и через одинаковый промежуток времени их количество удваивается, например: летом инфузории размножаются бесполым способом делением пополам. Вопрос: сколько будет инфузорий после 15-го размножения?

Ответ: $b_{15} = 2 \cdot 2^{14} = 32\ 768$ *(геометрическая прогрессия)*

5. Экономика: прогрессия имеет очень широкое применение в экономике. С её помощью банки производят расчеты с вкладчиками, определяют, какие средства можно разместить в кредиты, решают, стоит ли вкладывать средства в крупные проекты, доход от которых будет получен через несколько лет и т.д. Так, вклады в банках увеличиваются по схемам сложных и простых процентов. Простые проценты - увеличение первоначального вклада в арифметической прогрессии. Сложные проценты - увеличение первоначального вклада в геометрической прогрессии.

Например, нужно рассчитать доход, который клиент получит после окончания срока хранения вклада в банке, зная сумму вклада, ставку по вкладу и срок хранения вклада. Так, клиент открыл в Сбербанке вклад (депозит) на сумму 3 млн. рублей сроком на 6 месяцев. Банк платит клиенту за пользование его средствами ставку в размере 6% годовых. Схема расчета такова: , тогда получаем (Приложение 1, Таблица 1).

Налицо геометрическая прогрессия: 103037.75 рублей, где 100 000 - первоначальная сумма депозита, а 1,005 - знаменатель прогрессии (Приложение 1, Диаграмма 1)

6. Медицина: по такой же схеме идёт распространение инфекционной болезни среди людей. Схематически это может выглядеть так: инфицированный человек (источник инфекции) передаёт возбудителя болезни другим людям, каждый вновь инфицированный вовлекает в эпидемический процесс n - ое число людей, т.е. возникает инфекция.

Или можно рассмотреть в качестве примера прием таблеток - 2 таблетки 3-4 раза в день, т.е. часы приема: 8 часов, 11 часов, 14 часов, 17 часов. На лицо арифметическая прогрессия: .

Таким образом, нами были рассмотрены примеры применения прогрессий в нашей жизни и мы убедились, что арифметическая и геометрическая прогрессия, так же можно сделать вывод, что алгебра является частью общечеловеческой культуры.

Заключение

Целью данного исследования было установить картину возникновения понятия прогрессии и выявить примеры их применения.

Мы в соответствии поставленным задачам выявили: когда и в связи, с какими потребностями человека появилось понятие последовательности, в частности - прогрессии; какие ученые внесли большой вклад в развитие теоретических и практических знаний по изучаемой проблеме; теоретические основы геометрической и арифметической прогрессий.

Установили, какое прикладное значение имеют арифметическая и геометрическая прогрессии, нашли и показали примеры применения прогрессий в нашей жизни.

В ходе исследования мы использовали следующие методы: анализ школьных учебников математики, математической, справочной литературы, литературы по истории математики, материала из Интернета и обобщили найденные факты в учебниках по биологии, по экологии, по экономики и в медицинских справочниках по применению прогрессий.

Таким образом, мы подтвердили поставленную гипотезу о том, что математика - наука очень древняя и возникла она из практических нужд человека, значит и прогрессии имеют определенное практическое значение.

Библиографический список

1. Глейзер Г.И. История математики в школе VII - VIII кл. Пособие для учителей. - М.: Просвещение, 1982. - 240 с.
2. Мордкович А.Г.Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для общеобразовательных учреждений. - 9-е изд., стер. - М.:Мнемозина, 2007. - 231 с.
3. Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры. Книга для учащихся 7-9 классов средней школы -М.: Просвещение, 1990.-224с.
4. Современный толковый словарь русского языка / Гл. ред. С.А. Кузнецов. - СПб.: «Норинт», 2005. - 960 с.
5. Сонин
6. Энциклопедический словарь юного математика /Сост. А.П.Савин.- М.: Педагогика, 1989.-352с.
7. - статья о прогрессиях
8. - литературный словарь
9. - Размеры стихосложения.