Элементарные матрицы

Под элементарной матрицей мы будем понимать квадратную матрицу, которая получается из единичной матрицы путем элементарных преобразований над строками (столбцами) [6].

Здесь под неособенными элементарными преобразованиями будем понимать следующие преобразования над строками (столбцами) матрицы:

1) умножение строки (столбца) на скаляр $γ$,

2) прибавление (вычитание) к какой-либо строке (столбцу) матрицы другой строки(столбца), умноженной на скаляр $γ$.

Возьмем единичную матрицу второго порядка $\left[\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right]$. Получим из нее элементарные матрицы:

$\left[\begin{matrix}γ&0\\0&1\end{matrix}\right]$,$\left[\begin{matrix}1&0\\0&γ\end{matrix}\right]$,$\left[\begin{matrix}1&γ\\0&1\end{matrix}\right],\left[\begin{matrix}1&0\\γ&1\end{matrix}\right]$

Возьмем единичную матрицу $n-го$ порядка $E$ и с помощью неособенными элементарными преобразованиями получим из нее элементарные матрицы следующих видов:

$E\_{γ(i)}$, полученная из матрицы $E$ путем умножения ее $ $-й строки на скаляр, $γ$ имеет вид:

$$E\_{γ(i)}=\left[ \begin{matrix}1&0&\begin{matrix}0&\cdots &0\end{matrix}\\0&1&\begin{matrix}0&\cdots &0\end{matrix}\\\begin{matrix}\cdots \\\begin{matrix}0\\\cdots \\0\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\cdots \\\begin{matrix}0\\\cdots \\0\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\cdots &\cdots &\cdots \end{matrix}\\\begin{matrix}\begin{matrix}\cdots \\\cdots \\0\end{matrix}&\begin{matrix}γ\\\cdots \\\cdots \end{matrix}&\begin{matrix}0\\\cdots \\0\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right]$$

$E\_{i+γ\left(j\right)}$, полученная путем прибавления к ее $$-й строке элементов $j$-й строки, умноженной на скаляр $γ$:

$$E\_{γ(i)}=\left[ \begin{matrix}1&0&\begin{matrix}0&0&\begin{matrix}0&0&\begin{matrix}\cdots &0\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\0&1&\begin{matrix}0&0&\begin{matrix}0&0&\begin{matrix}\cdots &0\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}\cdots \\\begin{matrix}0\\\cdots \\0\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\cdots \\\begin{matrix}0\\\cdots \\0\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\cdots &\cdots &\begin{matrix}\cdots &\cdots &\begin{matrix}\cdots &\cdots \end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}\begin{matrix}\cdots \\\cdots \\0\end{matrix}&\begin{matrix}1\\\cdots \\0\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\cdots &γ&\begin{matrix}\cdots &0\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}\cdots &\cdots &\begin{matrix}\cdots &\cdots \end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}0&0&\begin{matrix}\cdots &1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right]$$

Аналогичным путем можно получить матрицы $E\_{γ(i)}^{-1}, E\_{i-γ(j)}$.

**Свойство 1.** Любая элементарная матрица обратима. Матрица, обратная к элементарной, является элементарной.

Доказательство. Данное свойство доказывается непосредственной проверкой. В самом деле, $(∀γ\ne 0)$ мы имеем:

$$E\_{γ\left(j\right)}∙E\_{γ\left(j\right)}^{-1}= E\_{γ\left(j\right)}^{-1}∙E\_{γ\left(j\right)}=E$$

$$E\_{i+γ\left(j\right)}∙E\_{i-γ\left(j\right)}= E\_{i-γ\left(j\right)}∙E\_{i+γ\left(j\right)}=E$$

**Свойство 2.** Произведение элементарных матриц является обратимой матрицей.

Доказательство непосредственно следует из доказательства свойства 1.

**Свойство 3.** Если неособенное строчечное элементарное преобразование $φ$ переводит прямоугольную матрицу $A$ размерности $m×n$ в матрицу $B$, то

$B=E\_{φ}∙A$,

где $E\_{φ}$есть матрица вышеуказанного элементарного преобразования$ φ$.

**Доказательство**. Если $φ$ – умножение $$-й строки $A$=$\left‖a\_{ij}\right‖$ на ненулевой скаляр$ γ$, то

$$E\_{γ\left(j\right)}∙A=\left[\begin{matrix}a\_{11}&\cdots &a\_{1n}\\\cdots &\cdots &\cdots \\\begin{matrix}γa\_{i1}\\\cdots \\a\_{m1}\end{matrix}&\begin{matrix}\cdots \\\cdots \\\cdots \end{matrix}&\begin{matrix}γa\_{in}\\\cdots \\a\_{mn}\end{matrix}\end{matrix}\right] ,$$

т.е.$ B=E\_{φ}∙A$.

Если же $E\_{φ}= E\_{(i)+γ\left(j\right)}$, то

$$E\_{(i)+γ\left(j\right)}∙A=\left[\begin{matrix}a\_{11}&\cdots &a\_{1n}\\\cdots &\cdots &\cdots \\\begin{matrix}a\_{i1}+γa\_{j1}\\\cdots \\a\_{m1}\end{matrix}&\begin{matrix}\cdots \\\cdots \\\cdots \end{matrix}&\begin{matrix}a\_{in}+γa\_{jn}\\\cdots \\a\_{mn}\end{matrix}\end{matrix}\right] ,$$

т.е. $B=E\_{(i)+γ\left(j\right)}∙A$.

Легко проверить, что верно обратное утверждение [6].

**Свойство 4.** Если матрица $C$ получается из матрицы $A$ путем цепочки неособенных элементарных преобразований $φ\_{1},…, φ\_{s}$, то.

$$C=E\_{φ\_{s}}∙…∙E\_{φ\_{1}}∙A$$

**Доказательство.** Пусть элементарному преобразованию $φ\_{1}$соответствует матрица $E\_{φ\_{1}}$, элементарному преобразованию $φ\_{2}$ соответствует матрица $E\_{φ\_{2}}$ и т.д., элементарному преобразованию $φ\_{s}$ соответствует матрица $E\_{φ\_{s}}$. При свершении элементарного преобразования $φ\_{1}$ матрица $A$ переходит в матрицу$ E\_{φ\_{1}}∙A$, при свершении элементарного преобразования $φ\_{2}$ матрица $E\_{φ\_{1}}∙A$ переходит в матрицу $E\_{φ\_{2}}∙E\_{φ\_{1}}∙A$ и т.д.; при свершении элементарного преобразования $φ\_{s}$ матрица $E\_{φ\_{s-1}}∙…∙E\_{φ\_{1}}∙A$ переходит в матрицу

$$E\_{φ\_{s}}∙E\_{φ\_{s-1}}∙…∙E\_{φ\_{1}}∙A. $$