Элементарные матрицы

Под элементарной матрицей мы будем понимать квадратную матрицу, которая получается из единичной матрицы путем элементарных преобразований над строками (столбцами) [6].

Здесь под неособенными элементарными преобразованиями будем понимать следующие преобразования над строками (столбцами) матрицы:

1) умножение строки (столбца) на скаляр ,

2) прибавление (вычитание) к какой-либо строке (столбцу) матрицы другой строки(столбца), умноженной на скаляр .

Возьмем единичную матрицу второго порядка . Получим из нее элементарные матрицы:

,,

Возьмем единичную матрицу порядка и с помощью неособенными элементарными преобразованиями получим из нее элементарные матрицы следующих видов:

, полученная из матрицы путем умножения ее -й строки на скаляр, имеет вид:

, полученная путем прибавления к ее -й строке элементов -й строки, умноженной на скаляр :

Аналогичным путем можно получить матрицы .

**Свойство 1.** Любая элементарная матрица обратима. Матрица, обратная к элементарной, является элементарной.

Доказательство. Данное свойство доказывается непосредственной проверкой. В самом деле, мы имеем:

**Свойство 2.** Произведение элементарных матриц является обратимой матрицей.

Доказательство непосредственно следует из доказательства свойства 1.

**Свойство 3.** Если неособенное строчечное элементарное преобразование переводит прямоугольную матрицу размерности в матрицу , то

,

где есть матрица вышеуказанного элементарного преобразования.

**Доказательство**. Если – умножение -й строки = на ненулевой скаляр, то

т.е..

Если же , то

т.е. .

Легко проверить, что верно обратное утверждение [6].

**Свойство 4.** Если матрица получается из матрицы путем цепочки неособенных элементарных преобразований , то.

**Доказательство.** Пусть элементарному преобразованию соответствует матрица , элементарному преобразованию соответствует матрица и т.д., элементарному преобразованию соответствует матрица . При свершении элементарного преобразования матрица переходит в матрицу, при свершении элементарного преобразования матрица переходит в матрицу и т.д.; при свершении элементарного преобразования матрица переходит в матрицу