

Занятие № 26

1. Разбор конкурсной «Задачи недели»
2. Доказательство тождеств (стр. 51 №№ 118(A), 119(A), 120(A) «1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике»)

Задача на конкурс:

100 мышей за 100 дней съедают 200 кг крупы. Сколько зерна съедят 10 мышей за 10 дней?

РЕШЕНИЕ:

100 МЫШЕЙ ЗА 100 ДНЕЙ – 200 кг крупы;

100 мышей за 10 дней – 20 кг крупы;

10 мышей за 10 дней – 2 кг крупы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВ:

№ 118(A)

Найти натуральные m и n , если $4m^2n - n - 4m^2 = 58$.

№ 119(A)

Доказать, что если $x + y = 2007z$ и $2007zu = y(z + u)$, где $z \neq 0$, $u \neq 0$, то верно равенство $\frac{x}{z} = \frac{y}{u}$.

№ 120(A)

Доказать, что если $a + b = 1$, то $\frac{a^2}{b^2 - 1} - \frac{b^2}{a^2 - 1} = \frac{2(b - a)}{ab + 2}$.

№ 118

Рис. 24

Решение. Разложив левую часть уравнения на множители, получим:

$$4m^2(n - 1) - (n - 1) = 57.$$

или $(2m - 1)(2m + 1)(n - 1) = 57 = 1 \cdot 3 \cdot 19$.

Это равенство в области натуральных чисел выполняется, если $m = 1$, $n = 20$.

№ 119

Решение. Перемножив левые и правые части данных равенств, получим:

$$2007zu(x + y) = 2007zy(x + y) \text{ или, разделив обе части на}$$

$2007z \neq 0$, имеем $u(x + y) = y(z + u)$ или $ux = yz$, откуда $\frac{x}{z} = \frac{y}{u}$.

№ 120

Решение. Упростим левую часть данного равенства, учитывая, что $a + b = 1$:

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2 - 1} - \frac{b^2}{a^2 - 1} &= \frac{a^4 - b^4 - a^2 + b^2}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} = \\ &= \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 1)}{a^2b^2 - (a^2 + b^2) + 1} = \\ &= \frac{(a - b)(a + b)((a + b)^2 - 2ab - 1)}{a^2b^2 - ((a + b)^2 - 2ab - 1)} = \frac{(a - b) \cdot 1 \cdot (1 - 2ab - 1)}{a^2b^2 - (1 - 2ab - 1)} = \\ &= \frac{(a - b) \cdot (-2ab)}{a^2b^2 + 2ab} = \frac{2ab(b - a)}{ab(ab + 2)} = \frac{2(b - a)}{ab + 2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЗАДАЧА НА КОНКУРС: решить графически уравнение $|x| = x - 3$

Ответ: нет корней:

