ВВЕДЕНИЕ

Эта работа посвящена задаче А.Лебега и взаимосвязи ее с некоторыми известными задачами по геометрии. В 1914 году Анри Лебег в беседе с венгром И.Палом поставил задачу о нахождении вида плоской фигуры наименьшей площади (или наименьшего возможного периметра), способного покрыть любое множество на плоскости, где *diam* 1.

В настоящий момент задача Лебега не решена, в связи с чем делаются попытки нахождения минимальной выпуклой покрышки в более узком классе выпуклых множеств. Так в 1983 году М.Д.Ковалевым была найдена минимальная выпуклая покрышка для семейства всех треугольников, диаметр которых не превышает 1.

В предлагаемой работе задача Лебега рассматривается для класса выпуклых четырехугольников, диаметр которых не превосходит 1.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

ОПР.1 Подмножество C *в* R^2 называется выпуклым, если $(1-a)x+ay\in C$ для любых $x\in C, y\in C$ **и** 0 $a\leq 1$.

ОПР.2 Выпуклым телом в пространстве R^2 называется любое выпуклое множество, имеющее внутренние точки. При $n=2$ мы называем *K*- выпуклой фигурой.

ОПР.3 Выпуклое тело *K,* имеющее во всех направлениях одинаковую ширину *m* называется телом постоянной ширины *m*.

ОПР.4 Диаметром фигуры f называется наибольшее из расстояний между точками фигуры f.

$d=max\ g\ (A, B)$, где $A, B\in f$

$g\ (A,B)$ – евклидово расстояние между точками *A и B.*

ОПР. 5 Выпуклой покрышкой будем называть каждую выпуклую фигуру *K*, которой можно покрывать любую фигуру *f* , где *f* 1.

ОПР.6 Назовем выпуклую покрышку минимальной, никакое замкнутое собстственное выпуклое подмножество которой уже не является выпуклой покрышкой.

Однако и восьмиугольник И.Пала еще не является самой экономной покрышкой. А именно, немецкий математик Р.Шпраг в 1980 году доказал, что если провести две дуги $\cup FM$ и $\cup GM$ окружностей, радиуса 1, с центрами в точках C и D, касающихся сторон A_4A_5 *и* A_5A_6 восьмиугольника в точках F и G и криволинейных треугольника FA_5M и GA_5M, мы получим (криволинейный!) десятиугольник $W=BCA_2DEA_4FMGA_6$,

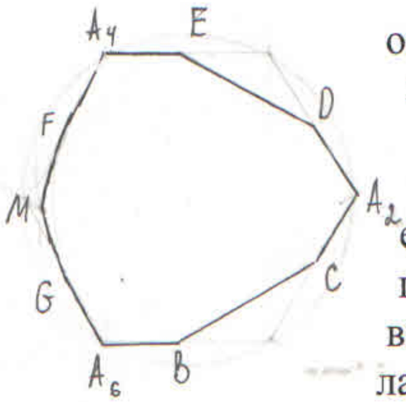


рис.3

ограниченный восемью отрезками прямых и двумя дугами окружностей, этот десятиугольник (*рис.3*) все еще является минимальной выпуклой покрышкой. При этом ее площадь равна $S_w \approx 0,84413570$.Эта покрышка была построена в 1980 году.

Однако нет никаких оснований ожидать, что полученный (криволинейный) десятиугольник окажется именно той выпуклой покрышкой наименьшей возможной площади, отыскание которой составляет содержание задачи А.Лебега.

В настоящее время задача А.Лебега не решена, в связи с чем делаются попытки нахождения минимальной выпуклой покрышки в более узком классе выпуклых множеств *diam 1.*

В 1983 году М.Д.Ковалев нашел минимальную выпуклую покрышку для семейства всех треугольников, *diam 1.*

ТЕОРЕМА: Наименьшей выпуклой покрышкой для семейства всех треугольников со сторонами не больше 1, является треугольник $\Phi=ABC$ с основанием $AB=1$, углом $B=60^0$ при одном из концов основания и высотой $CD=\cos 10^0$. Фигура Φ является единственной (с точностью до перемещений и отражений) минимальной покрышкой. Ее площадь равна $2^{-1}\cos 10^0 \approx 0,4924\ldots$

Разумеется, результат Г.У.Е.Юнга может быть перенесен на пространство совсем просто. Соответствующая стереометрическая теорема была доказана даже раньше планиметрической теоремы.

ТЕОРЕМА: Каждое тело диаметра 1 можно заключить внутрь шара K радиуса $\frac{\sqrt{6}}{4}$ и объема $V_к=\frac{\pi\sqrt{6}}{8} \approx 0,95\ldots$, причем эту оценку нельзя улучшить.

Однако шар Г.У.Е.Юнга K наверняка не является выпуклой (пространственной) покрышкой наименьшего возможного объема.

Американский математик Д.Гейбл доказал теорему о правильном тетраэдре T с ребром $\sqrt{6}$.

ТЕОРЕМА: Каждое тело диаметра 1 можно включить в правильный тетраэдр T с ребром $\sqrt{6}$ (объем этого тетраэдра $V_T = \sqrt{3} \approx 1{,}73\ldots$).

ТЕОРЕМА: Выпуклой пространственной покрышкой является правильный октаэдр Ω с ребром $\frac{\sqrt{6}}{2}$ и объемом $V_\Omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866\ldots$.

Аналогично, задачи из планиметрии, из октаэдра Ω можно еще отрезать три примыкающие к его трем вершинам пирамиды, отсекаемые от октаэдра Ω плоскостями τ_1, τ_2 и τ_3, касающимися вписанного в октаэдр Ω шара χ и параллельными диагональными плоскостями октаэдра Ω. Полученный неправильный одиннадцатигранник Г все еще является выпуклой покрышкой. Его объем $V_\Gamma = \frac{5}{2} - \sqrt{3} \approx 0{,}768\ldots$.

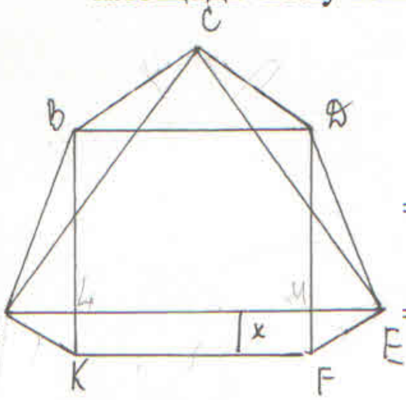
При этом и одиннадцатигранник Г также, видимо, не является даже минимальной выпуклой пространственной покрышкой, откуда уже следует, что он не может являться решением проблемы А.Лебега. Укажем, что для к-мерного (евклидова) пространства также справедливы теоремы о «шаре Г.У.Е.Юнга» (радиус соответствующего к-мерного шара равен $\sqrt{\frac{\kappa}{2\kappa+2}}$) и о «тетраэдре Д.Гейбла» (ребро этого тетраэдра «правильного» к-мерного симплекса равно $\frac{1}{2}\sqrt{2\kappa(\kappa+1)}$).

В нашей работе была предпринята попытка найти минимальную выпуклую покрышку для семейства всех выпуклых четырехугольников, диаметр которых не превышает 1.

1. МИНИМАЛЬНАЯ ВЫПУКЛАЯ ОБОЛОЧКА ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА И КВАДРАТА.

В ходе решения возникла гипотеза, что любой выпуклый четырехугольник, *diam 1*, можно поместить в выпуклую фигуру, которая является минимальной выпуклой оболочкой для равностороннего треугольника со сторонами 1 и квадрата с диагоналями 1. Найдем минимальную выпуклую оболочку для этих фигур. Для этого рассмотрим несколько случаев:

СЛУЧАЙ 1: Квадрат $KBDF$ располагается стороной KF ниже стороны AE треугольника ACE на расстоянии x (*рис.4*). Посчитаем площадь полученной выпуклой оболочки.



$$AL=ME=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bullet\frac{1}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{об}=2S_{AKL}+S_{KFML}+S_{ABDE}+S_{BCD}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)X+\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-X\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+X-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{4}X+\frac{\sqrt{2}}{2}X+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-X\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+X\right).$$

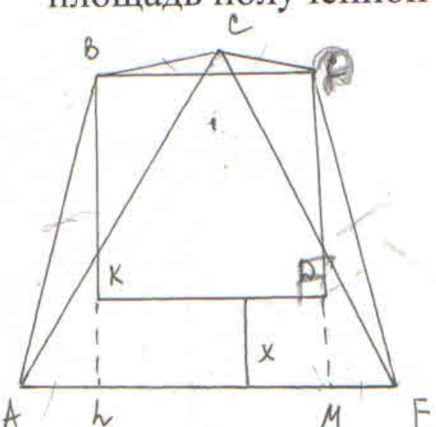
рис.4

При увеличении расстояния x, площадь выпуклой оболочки увеличивается. Посчитаем площадь выпуклой оболочки при $x=0$.

$$S_{в.об.}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\cdot 0+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+0\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{8}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}=\frac{\sqrt{8}+\sqrt{6}}{8}.$$

СЛУЧАЙ 2: Квадрат $KBDF$ располагается стороной KF выше стороны AE треугольника ACE на расстоянии x (*рис.5*). Посчитаем площадь полученной выпуклой оболочки.



$$S_{в.об}=2S_{ABL}+S_{LBDM}+S_{BCD}=$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+X\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+X\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-X\right)=$$

$$\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+X\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+X\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-X\right).$$

рис.5

При увеличении расстояния x, площадь выпуклой оболочки увеличивается. Посчитаем площадь выпуклой оболочки при $x=0$.

$$S_{в.об.}=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+0\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+0\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)+\frac{2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{8}-\frac{4}{8}+\frac{2}{4}+\frac{\sqrt{6}}{8}-\frac{2}{8}=\frac{\sqrt{8}+\sqrt{6}}{8}.$$

СЛУЧАЙ 3: Рассмотрим случай, когда диагональ CF четырехугольника $BCDF$ находится на высоте LK треугольника ALE, причем квадрат $BCDF$ располагается выше стороны треугольника, на которую опущена высота (*рис.6*). Посчитаем площадь полученной выпуклой оболочки.

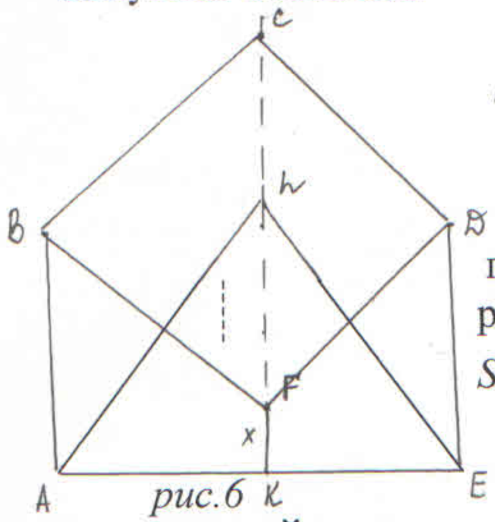


рис.6

$$S_{в.об}=2S_{ABCK}=2\cdot\frac{(1+X)+\left(\frac{1}{2}+X\right)}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left((1+X)+\left(\frac{1}{2}+X\right)\right)\cdot\frac{1}{2}$$

При увеличении расстояния x, увеличивается площадь полученной выпуклой оболочки, когда расстояние $x=0$.

$$S_{в.об}=((1+0)+(\frac{1}{2}+0))\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\ .$$

СЛУЧАЙ 4: Рассмотрим случай, когда высота LK треугольника ALE располагается на диагонали CF квадрата $BCDF$, не выходя за ее пределы (*рис.7*). Посчитаем площадь полученной выпуклой оболочки.

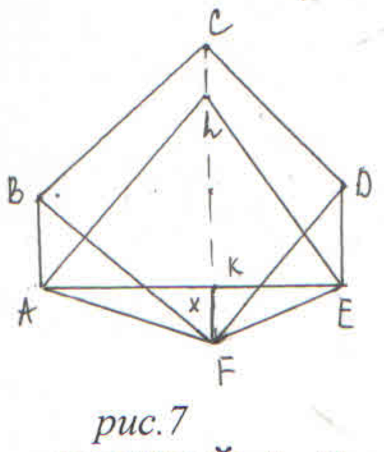


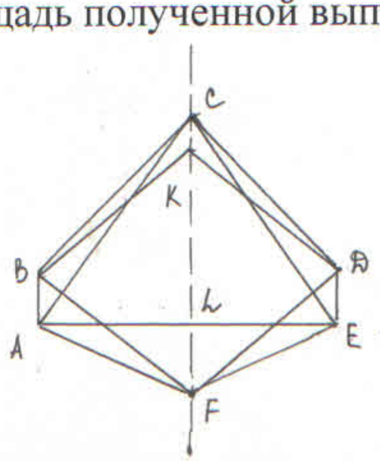
рис.7

$$S_{в.об}=2S_{ABCF}=2\cdot\frac{1+\left(\frac{1}{2}+X\right)}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(1+\left(\frac{1}{2}+X\right)\right)\cdot\frac{1}{2}$$

Если увеличить расстояние x, то увеличится площадь полученной выпуклой оболочки. Посчитаем площадь при расстоянии $x=0$.

$$S_{в.об}=\left(1+\left(\frac{1}{2}+0\right)\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

СЛУЧАЙ 5: Рассмотрим случай, когда одна вершина квадрата располагается в плоскости треугольника ACE на высоте CL, а противоположная ей вершина квадрата $BKDF$ расположена ниже треугольника ACE, на которую опущена высота CL (*рис.8*) Посчитаем площадь полученной выпуклой оболочки.

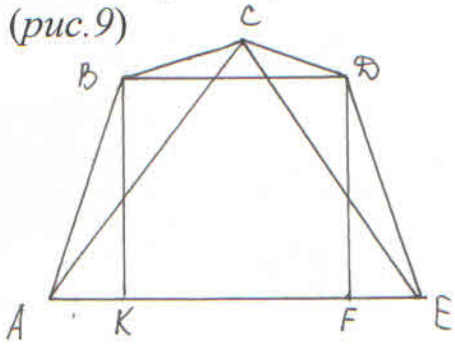


$$S_{в.об}=2S_{ABCF}=2\cdot\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+X\right)+\left(\frac{1}{2}-X\right)}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+X+\frac{1}{2}-X\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}.$$

рис.8

Сравним площади выпуклых оболочек в рассмотренных случаях, при расстоянии $x=0$. Получили, что выпуклая оболочка для равностороннего треугольника со сторонами *1* и квадрата с диагоналями *1*, будет тогда наименьшей, когда одна из сторон квадрата *BKDF* будет располагаться на одной из сторон треугольника *ACE* (*рис.9*)



Площадь полученной выпуклой оболочки будет равна $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{8}}{8}$

рис.9

УТВЕРЖДЕНИЕ 1: Не все выпуклые четырехугольники можно поместить в полученную выпуклую фигуру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим трапеции с основанием и диагоналями *1*. Расположим трапецию на стороне *AE* выпуклой покрышки *ABCDE* (*рис.10*). Посчитаем угол, полученной выпуклой покрышки. Из треугольника *ABK* найдем $\angle BAK$. $\angle BKA=90^0$, сторона

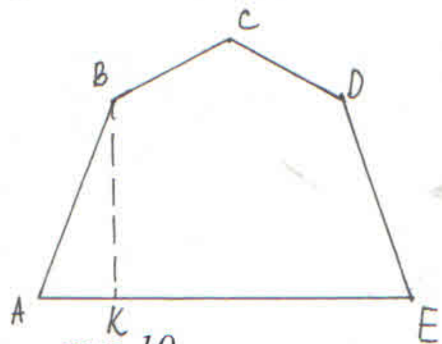


рис.10

$$AK=FE=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\ (рис.10)$$

$$BK=AKtg(\angle BAK)\Rightarrow tg(\angle BAK)=\frac{BK}{AK}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg(\angle BAK)=\frac{2}{\sqrt{2}-1}\Rightarrow \angle BAK=arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}-1}\right),$$

$\angle BAK\approx 78,29909\ldots$.

Получили, что трапеции с углом при основании большим, чем у выпуклой покрышки, не будут покрываться этой фигурой.

Предположим, что трапеции можно по-другому расположить в этой выпуклой покрышке (*рис.11*).

Проведем прямую, параллельную диагонали *BE* так чтобы длина, полученного отрезка в покрышке *ABCDE* была равна 1. На полученном отрезке расположим основание данной трапеции *LMNK* с уг-

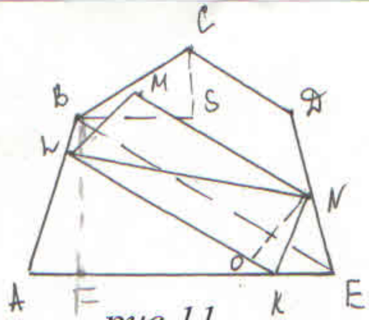


рис.11

лом при основании большим, чем $\angle BAK \approx 78{,}29909$ Посчитаем диагональ BE выпуклой покрышки $ABCDE$. Из треугольника BEF найдем BE:

$$BF=\frac{\sqrt{2}}{2},\ FE=AE-AF=1-\frac{2-\sqrt{2}}{4}=\frac{4-2+\sqrt{2}}{4}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\Rightarrow$$

$$BE=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{14+4\sqrt{2}}{16}}=\frac{\sqrt{14+4\sqrt{2}}}{4}$$; найдем теперь $\angle BEA$:

$$BF=FE tg(\angle BEA)\Rightarrow \angle BEA=arctg\frac{2}{1+\sqrt{2}},\ \angle BEA=\angle LKA.$$

Предположим, что углы при основании трапеции $LMNK$ равны 79^0.

Найдем $\angle NKE$: $\angle NKE=180^0-79^0-arctg\frac{2}{1+\sqrt{2}}=101^0--arctg\frac{2}{1+\sqrt{2}}$,

$\angle NKE\approx 61{,}36071^0\ldots$.

Найдем боковую грань трапеции $LMNK$:

$\angle LKN=\angle LNK \qquad \Rightarrow \angle KLN=180^0-158^0=22^0 \qquad \Rightarrow NL=LM$:

$$\frac{NK}{\sin 22^0}=\frac{LK}{\sin 79^0}\Rightarrow NK=\frac{\sin 22^0}{\sin 79^0}.$$

Высота NO трапеции $LMNK$ равна:

$NO=NK\sin 79^0=\sin 22^0$.

Найдем отрезок KE: $KE=AE-AK$. Чтобы найти сторону AE, найдем сначала $\angle ALK$; $\angle ALK=180^0-arctg\frac{2}{\sqrt{2}-1}-arctg\frac{2}{\sqrt{2}+1}$

$$\Rightarrow \frac{LK}{\sin\left(arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}-1}\right)\right)}=\frac{AK}{\sin\left(180^0-\left(arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}-1}\right)+arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)\right)\right)}.$$

$$AK=\frac{\sin\left(arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}-1}\right)+arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)\right)}{\sin\left(arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}-1}\right)\right)}\Rightarrow KE=1-\frac{\sin\left(arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}-1}\right)+arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)\right)}{\sin\left(arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}-1}\right)\right)}\Rightarrow$$

$KE\approx 1-0{,}9021997=0{,}0978003$.

Посчитаем, какую из сторон DE или CD, пересекает ребро KN трапеции. Найдем сторону DE выпуклой покрышки $ABCDE$. Из треугольника ABF:

$$AB=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{14-4\sqrt{2}}{16}}=\frac{\sqrt{14-4\sqrt{2}}}{4}\Rightarrow DE=AB\approx 0{,}7221126\ldots .$$

Найдем сторону DK и угол DKE треугольника KDE:

$DK^2=DE^2+EK^2-2\cdot DE\cdot EK\cdot\cos(\angle DEK)\Rightarrow DK\approx 0{,}7087781\ldots$, $\angle DEK$ найдем из соотношения:

$$\frac{DE}{\sin(\angle DKE)}=\frac{DK}{\sin\left(arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}-1}\right)\right)}\Rightarrow \sin(\angle DKE)=\frac{DE\cdot\sin\left(arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}-1}\right)\right)}{DK}\Rightarrow \angle DKE\approx 86{,}065$$

Получили, что $\angle DKE > \angle NKE \Rightarrow$ если ребро трапеции *LMNK* пересекает выпуклую покрышку, то оно пересечет ее на стороне *DE.*

Теперь посчитаем какую сторону *BC* или *CD* пересекает боковая грань *LM* трапеции *LMNK.* Из треугольника *BCS* (*рис.11*) найдем сторону *BC.* Для этого найдем сторону *CS*:

$$CS=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow BC=\sqrt{BS^2+CS^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)^2}\Rightarrow BC\approx 0{,}1502551.$$

Найдем сторону *BL* треугольника *BLC* (*рис.11*): *BL*=*AB*-*AL*

$$\frac{AL}{\sin\left(arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)\right)}=\frac{LK}{\sin\left(arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)\right)}\Rightarrow AL=\frac{\sin\left(arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)\right)}{\sin\left(arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}-1}\right)\right)}\Rightarrow AL\approx 0{,}6514899\Rightarrow BL\approx 0{,}07$$

Найдем в треугольнике *BLC* угол *BLC:*

$$\angle LBC=\angle ABF+\angle FBD+\angle DBC$$

$$\angle ABF=180^0-90^0-\sin\left(arctg\left(\frac{2}{\sqrt{2}-1}\right)\right)\approx 24{,}2034^0\Rightarrow \angle LBC\approx 12{,}90433^0$$

Найдем в треугольнике *BLC* сторону *LC:*

$$LC^2=BC^2+LB^2-2\cdot BC^2\cdot LB^2\cdot\cos(\angle LBC)\Rightarrow LC\approx 0{,}487926$$

Посчитаем угол *BLC* в треугольнике *LBC*:

$$\frac{BC}{\sin(\angle BLC)}=\frac{LC}{\sin(\angle LBC)}\Rightarrow \sin(\angle BLC)=\frac{BC\cdot\sin(\angle LBC)}{LC}\Rightarrow \angle BLC\approx 40{,}05286^0$$

Найдем угол *BLM*:

$$\angle BLM=180^0-\angle ALK-\angle KLM\Rightarrow \angle BLM\approx 38{,}93836^0$$

Получили, что угол *BLC* меньше, чем угол *DLM*, следовательно, если сторона *LM*, трапеции *LMNK*, пересекает выпуклую покрышку, то она пересекает ее на стороне *BC*. Посчитаем в какой точке и при каком расстоянии стороны трапеции *LMNK* пересекают стороны покрышки *ABCDE*. Найдем стороны *LM* и *NK* до момента пересечения со сторонами *BC и DE* соответственно. Точки M^0, N^0 –точки пересечения трапеции с выпуклой покрышкой. Найдем LM^0:

$$\frac{LM^0}{\sin(\angle LBC)}=\frac{LB}{\sin(\angle DM^0L)}\Rightarrow LM^0=\frac{LB\cdot\sin(\angle LBC)}{\sin(\angle BM^{0L})}\Rightarrow LM^0\approx 0{,}218775,$$

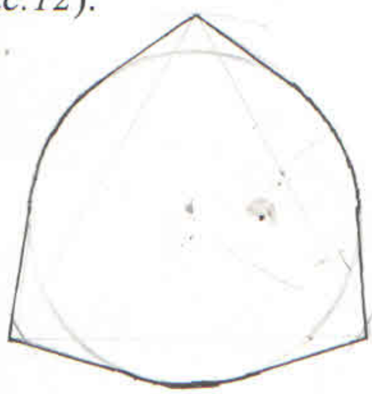
а сторона трапеции $LM=NK=\frac{\sin 22^0}{\sin 79^0}$. Теперь найдем KN^0:

$$\frac{KN^0}{\sin(\angle DEK)}=\frac{KE}{\sin(\angle LN^0E)}\Rightarrow KN^0=\frac{KE\cdot\sin(\angle DEK)}{\sin(\angle LN^0E)}\Rightarrow KN^0\approx 0{,}1479442.$$

Получили, что стороны трапеции *LMNK* пересекают стороны выпуклой покрышки. Следовательно, не все трапеции с основанием 1 и диагоналями 1 можно покрыть этой фигурой, Значит не все выпуклые четырехугольники можно поместить в эту фигуру, В частности, не все трапеции входят в эту выпуклую фигуру.

Утверждение доказано.

Рассмотрим выпуклую фигуру, которая является минимальной выпуклой покрышкой для равностороннего треугольника со сторонами 1 и круга с диаметром 1. Выпуклая оболочка этих в том случае минимальной, когда центр круга с радиусом $\frac{1}{2}$ будет располагаться на пересечении медиан равностороннего треугольника со сторонами 1 (*рис.12*).



Площадь полученной выпуклой покрышки равна S=0,825…[2].

рис.12

УТВЕРЖДЕНИЕ 2: Все четырехугольники можно поместить в полученную выпуклую фигуру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: При доказательстве утверждения разобьем класс четырехугольников с диаметрами, не превосходящими 1 на два вида. Рассмотрим *M-вид* тех четырехугольников, у которых хотя бы одна сторона равна 1, и *N-вид* четырехугольников, у которых диагонали равны 1.

Необходимо показать, что любой четырехугольник можно покрыть одним из четырехугольников *M-вида* или *N-вида*. Если это будет установлено, то мы получим, что все четырехугольники можно поместить в полученную выпуклую фигуру, в том случае, если все четырехугольники *M-вида* и *N-вида* уже покрыты этой выпуклой фигурой. Рассмотрим четырехугольник *A* с диаметром не превосходящим 1. Каждое выпуклое тело *A* может быть дополнено до содержащего *A* выпуклого четырехугольника *K* с диаметром равным 1.

Получим, что четырехугольник *A* будет попадать либо в *M-вид* либо в *N-вид*.

СЛУЧАЙ 1: Рассмотрим четырехугольник из *M-вида*. Сторону, равную 1, четырехугольника расположим на одной из сторон равностороннего треугольника. Углы при этой стороне, равной 1, будут острыми. Четырехугольник будет покрываться этой фигурой, так как если боковые стороны четырехугольника будут пересекать эту выпуклую фигуру, то его диагонали будут больше, чем 1, что противоречит условию.

СЛУЧАЙ 2: Рассмотрим четырехугольник диагоналями равными 1 и сторонами меньше 1. Если одна из сторон будет равна 1, то этот четырехугольник из *M-вида*. Теперь рассмотрим *N-вида* по поведению углов. У четырехугольников не может быть четыре тупых угла, поэтому рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 2а: У четырехугольника три угла тупых и диагональ равна 1. Расположим центр окружности на середине диагонали. Получим, что этот четырехугольник будет покрываться кругом с диаметром 1. Три тупых угла будут содержаться внутри окружности. Следовательно, если этот четырехугольник покрывается кругом с диаметром 1, то он будет содержаться в полученной выпуклой фигуре.

СЛУЧАЙ 2б: У четырехугольника два или один тупых угла. Этот случай рассматривается аналогично случаю 2а.

Утверждение доказано.