**О расстоянии между стратами**

Суровцева Н.Н., Клейменов В.Ф.

*Иркутский национальный исследовательский технический университет,*

*Иркутск, Россия*

При рассмотрении иерархических систем иногда необходимо оценить, насколько две страты близки друг к другу. Для этого вводится понятие расстояния между стратами. Дадим два следующих эквивалентных определения.

**Определение 5**. Расстоянием d1 (A,B) между стратами называется число

d1 =  (1),

где |A|, |B| - мощность страт A и B, min (a,b) – минимальное из чисел a,b, а max (a,b) – максимальное из чисел a,b.

**Определение 6**.Расстоянием d2 (A,B) между стратами называется число

d2 =  (2).

**Утверждение 3**. Расстояния между стратами обладают следующими свойствами:

1. d1 (A,B)= d2(A,B)= d(A,B);

2.d(A,B)=1<=> A∩B= Ø;

3. d(A,B)=0<=> AB или BA;

4. 0≤ d(A,B)≤1.

**Доказательство.**

1. Действительно, пусть |A|=m, |B|=n, |A∩B|=r и для определенности m≤n. Тогда |AB|= m+n-r. Вычислим расстояние d1. По определению 5 получим d1==, но по определению 6 d2=. То есть d1= d2  и можно обозначить это число через d.
2. Если A∩B= Ø, то r=0 и d== 1. Если d==1, то r=0 и A∩B= Ø.
3. Пусть m≤n, тогда, так как d==0, то m=r и (A∩B)A. Отсюда A∩B=A и AB. Обратно, если AB, то A∩B=A, m=r, m-r=0 и d=0.
4. Из формулы d= и неравенства r≥0 следует неравенство 0≤d≤1. Утверждение доказано.

Из формул (1) и (2) следует, что чем меньше расстояние d(A,B), тем страты A и B меньше отличаются друг от друга. Для разных иерархических систем бывает удобнее пользоваться либо формулой (1) либо формулой (2).

С помощью понятия расстояния между стратами можно доказать следующий критерий немодулярности.

**Утверждение 4.** В иерархии I тогда и только тогда существует немодулярная подрешетка, когда в ней найдутся такие страты A, B, C, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. d (A,C)=0, A≠C;
2. d (A,B)>0;
3. B∩C=A∩B (при этом, если |B|<|А|, то это условие эквивалентно равенству d(A,B)= d(B,C)).

**Доказательство.** Из условия 1 следует, что AC, а из условия 2 что не выполняются следующие включения: ни AB, ни BA. Докажем теперь замечания из условия 3. Пусть d(A,B)=d(B,C) и |B|<|А|. Так как AC, то A∩B≤ C∩B. Допустим, что A∩B≠C∩B. Тогда |A∩B|<|C∩B|, но отсюда min (|A|, |B|)=min(|B|, |C|)=|B|=m1, то d(A,B)= > =d(B,C), что противоречит замечанию из условия 3. Итак, B∩C= A∩B≠ A.

Рассмотрим теперь подрешетку ВС, С, В, А, A∩B, где A∩B≠A по условию 2.

 Тогда элементы этой подрешетки удовлетворяют условиям С≥А, ВС=АС и А(ВС)=А с другой стороны (АВ) = (СВ) и (АВ)С = (СВ)С=С, но так как A≠С, то А(ВС)≠(АВ)С и построенная подрешетка немодулярна.

Пусть теперь, обратно, в иерархии I существует немодулярная подрешетка. Тогда, по теореме 12 из главы 1 монографии [3], в I существует подрешетка N5, элементы которой удовлетворяют условиям 1, 2, 3. Утверждение доказано.

**Список литературы**

1. М. Месарович, Д. Мако Д, Такахара И., Теория иерархических многоуровневых систем «Мир», М., 1973г., 344с.
2. Г. Биркгоф., Теория решеток, «Наука», М., 1984г., 566с.
3. Клейменов В.Ф., Суровцева Н.Н., Иерархические системы: расстояния между стратами и факторизация систем// Современные наукоемкие технологии № 11, 2010г., С. 75-77
4. Суровцева Н.Н., Клейменов В.Ф., Динамические иерархические системы в социальной работе // Успехи современного естествознания № 5, 2011г., С. 139-140