Четырёхугольники

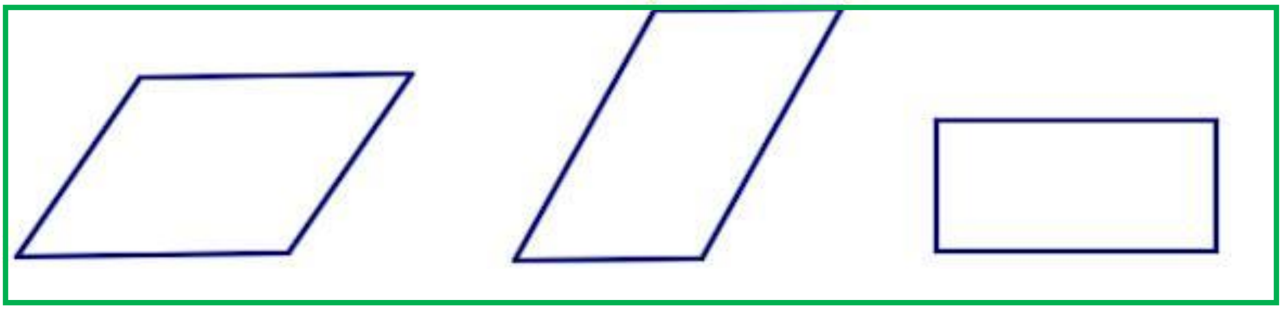
ГЕОМЕТРИЯ

Суворова Екатерина Александровна | ноябрь 2020

Оглавление

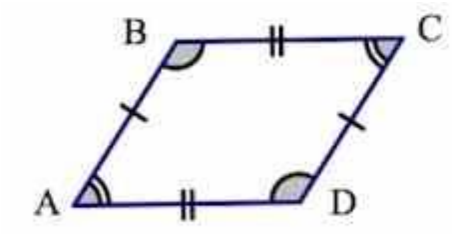
Параллелограмм

Параллелограмм – четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

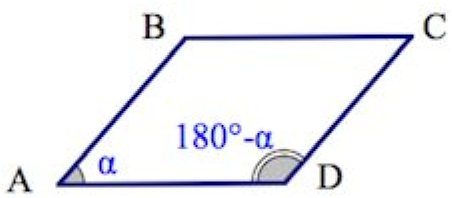


Свойства параллелограмма

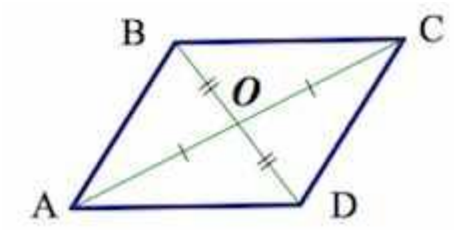
- Противоположные стороны параллелограмма попарно равны



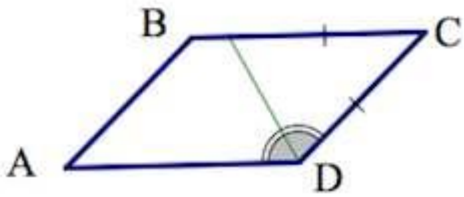
- Противоположные углы параллелограмма попарно равны
- Сумма смежных (соседних) углов параллелограмма равна 180 градусов



- Сумма всех углов равна 360°
- Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам



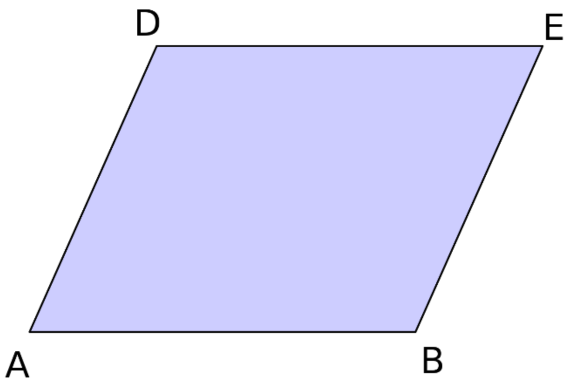
- Биссектриса отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник



Признаки параллелограмма

Четырехугольник ABCD является параллелограммом, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- Противоположные стороны попарно равны: AB=CD; BC=AD
- Диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам
- Противоположные стороны равны и параллельны: AB=CD; AB||CD

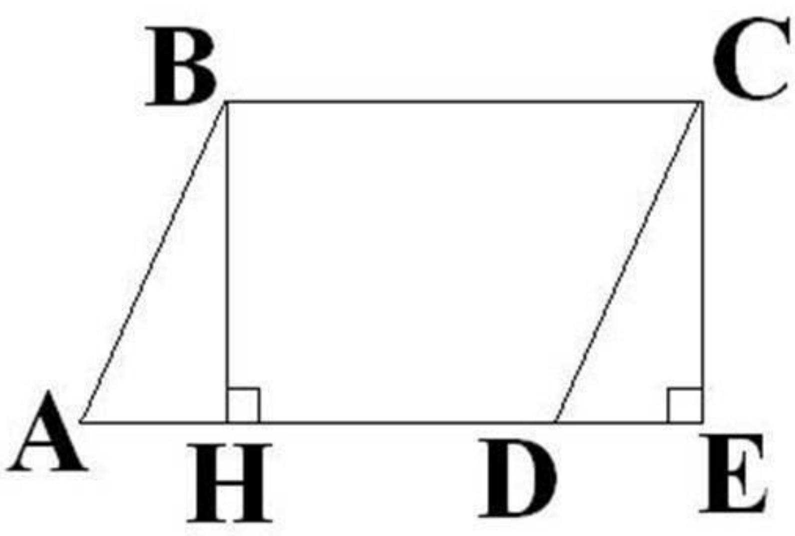


Площадь:

Теорема. Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

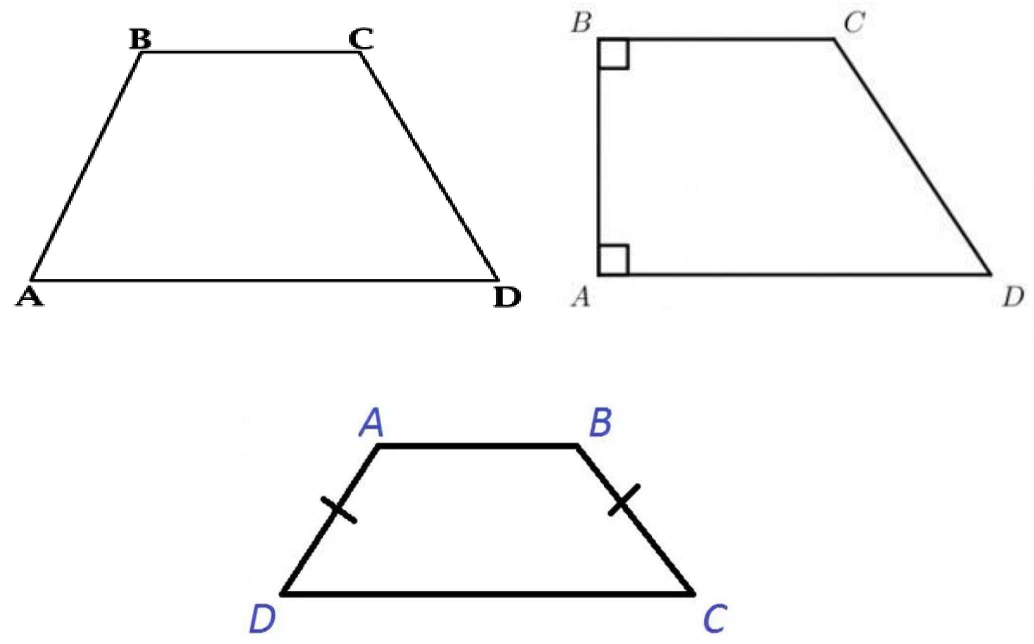
Доказательство.

Проведем высоты BH и CE. Докажем, что S(ABCD) = AD · BH.
ΔABH = Δ DCE - они прямоугольные и равны по гипотенузе (AB = CD как противоположные стороны параллелограмма) и катету (BH = CE как перпендикуляры, проведенные от одной из параллельных прямых к другой). Значит, равны и их площади (есть аксиома площади: равные фигуры имеют равные площади), т. е. S(ABH) = S(DCE).
Заметим, что S(ABCD) =S(ABCE) - S(DCE),
атакже S(HBCE) = S(ABCE) - S(ABH).
Откуда следует, что S(ABCD) = S(HBCE),т. к. выше доказано, что S(ABH) = S(DCE). Но HBCE - прямоугольник, а площадь прямоугольника равна произведению двух его сторон, т. е. S(HBCE) =BC · BH.AD = BC (т.к. ABCD – параллелограмм)
Следовательно, и S(ABCD) = AD · BH.
Теорема доказана.



Трапеция

Трапеция — четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.



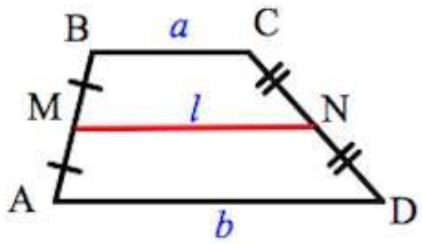
AD, BC — основания; AB, CD — боковые стороны.

Трапеция, у которой есть прямые углы при боковой стороне, называется прямоугольной.

Если боковые стороны равны, трапеция называется равнобедренной.

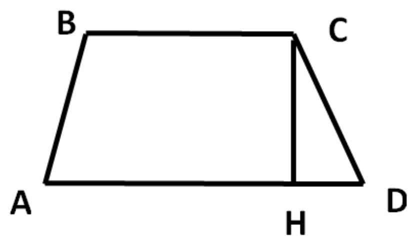
Высота трапеции — перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания на другое или его продолжение (расстояние между прямыми оснований).

Средняя линия — отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



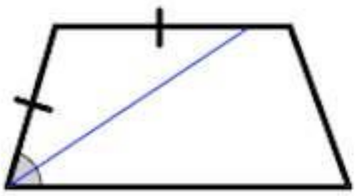
$l=\frac{a+b}{2}$

$MN \parallel AD$



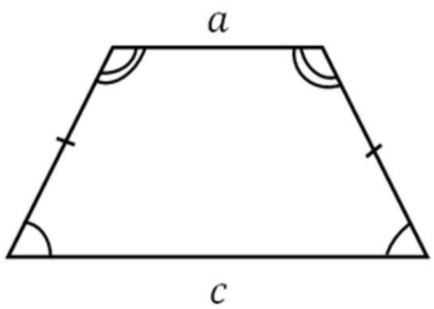
Свойство трапеции:

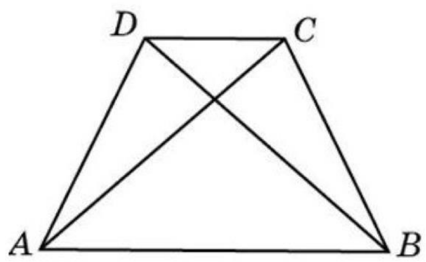
- Биссектриса любого угла трапеции отсекает на её основании (или продолжении) отрезок, равный боковой стороне.



Свойства равнобедренной трапеции:

- Диагонали равнобедренной трапеции равны
- Углы при основаниях равнобедренной равны

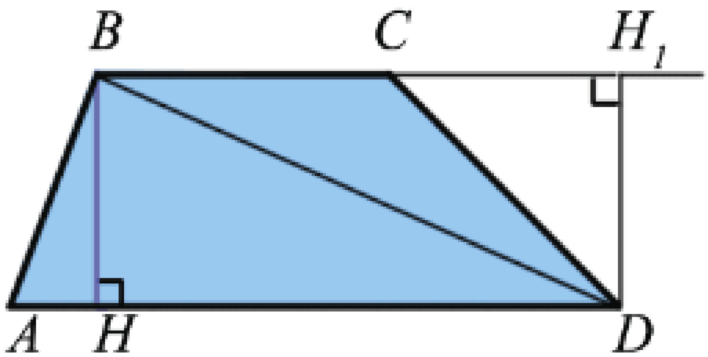




Площадь:

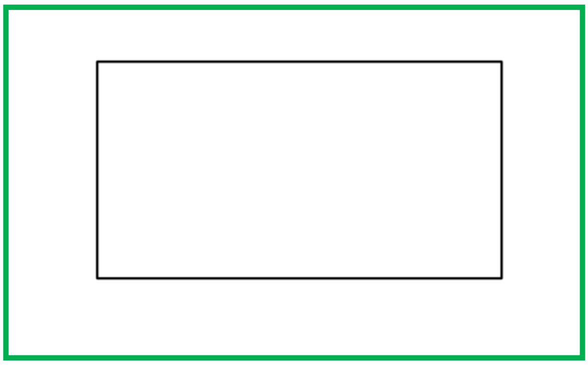
Теорема. Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту

Доказательство
Рассмотрим трапецию ABCD с основаниями AD и BC, высотой BH и площадью S.
Докажем, что S = ((AD + BC) / 2) · BH.
Диагональ BD разделяет трапецию на два треугольника ABD и BCD, поэтому S = S(ABD) + S(BCD). Примем отрезки AD и BH за основание и высоту треугольника ABD, а отрезки BC и DH1 за основание и высоту треугольника BCD. Тогда
SABD = AD · BH / 2, SBCD = BC · DH1/2.
Так как DH1 = BH, то SBCD = BC · BH / 2.
Такимобразом,
S = AD · BH / 2 + BC · BH/2 = ((AD + BC) / 2) · BH.
Теорема доказана.



Прямоугольник

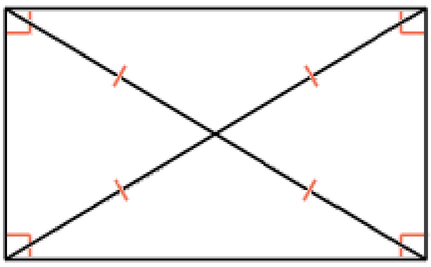
Прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые.



Так как прямоугольник – это параллелограмм, то все свойства параллелограмма верны и для прямоугольника.

Свойства прямоугольника (помимо свойств параллелограмма):

- Стороны прямоугольника являются его высотами.



- Диагонали прямоугольника равны.

Признаки:

- Диагонали параллелограмма равны.
- Все углы параллелограмма равны.

Теорема. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон:S = ab.

Доказательство

Рассмотрим прямоугольник со сторонами a, b и площадью S.

Докажем, что S = ab.

Достроим прямоугольник до квадрата со стороной a + b, как показано на рисунке 1.

Так как площадь квадрата равна квадрату его стороны, то площадь этого квадрата равна (a + b)2.

С другой стороны, этот квадрат составлен из данного прямоугольника с площадью S, равного ему прямоугольника с площадью S (так как, по свойству площадей, равные многоугольники имеют равные площади) и двух квадратов с площадями a2 и b2. Так как четырехугольник составлен из нескольких четырехугольников, то, по свойству площадей, его площадь равна сумме площадей этих четырехугольников:

(a + b)2 = S + S + a2 + b2, или a2 + 2ab + b2 = 2S + a2 + b2.

Отсюда получаем: S = ab

Теорема доказана.

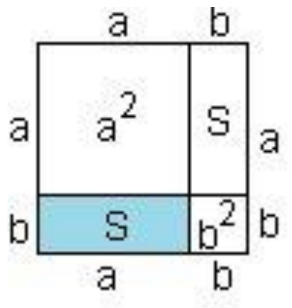
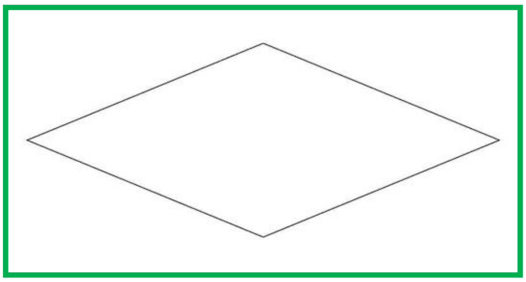


рис. 1

Ромб

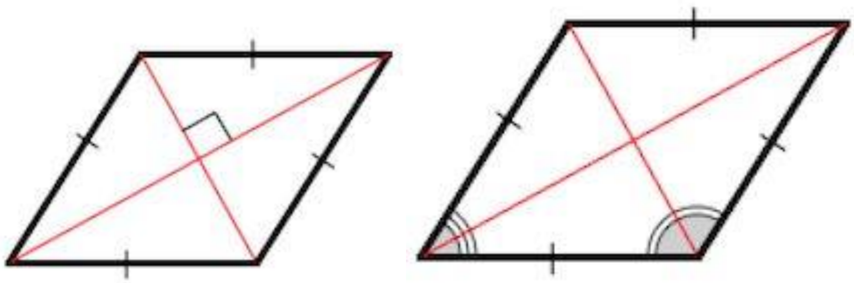
Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.



Поскольку ромб – это параллелограмм, то все свойства параллелограмма верны для ромба.

Свойства ромба (помимо свойств параллелограмма):

- Диагонали ромба перпендикулярны.



- Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

Признаки

- Все стороны параллелограмма равны между собой (AB=BC=CD=AD).
- Диагонали пересекаются под прямым углом (AC перпендикулярна BD).
- Диагонали параллелограмма являются биссектрисами его углов.

Площадь:

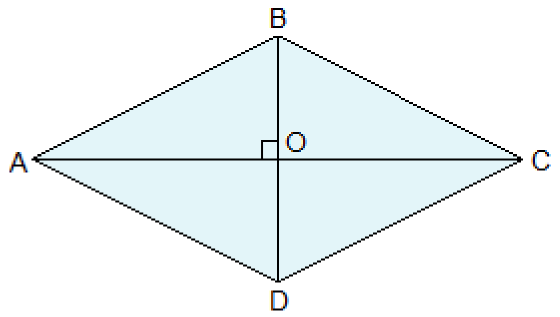
Теорема. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. $S = (AC \cdot BD) / 2$.

Доказательствоплощадь ромба.

Пусть ABCD — ромб, AC и BD — диагонали.

Тогда $S(ABCD) = S(ABC) + S(ACD) = (AC \cdot BO) / 2 + (AC \cdot DO) / 2 = AC (BO + DO) / 2 = (AC \cdot BD) / 2$.

Теорема доказана.

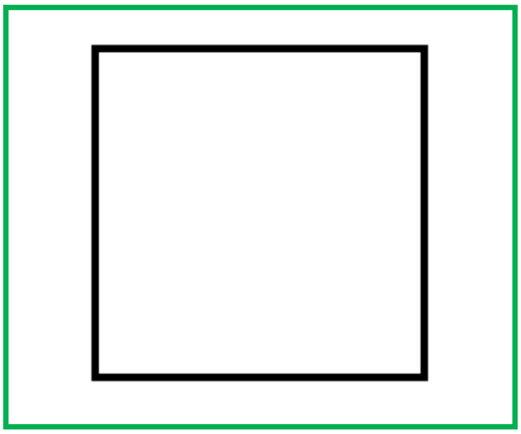


Квадрат

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны

Можно дать и другое определение квадрата:

Квадрат — это ромб, у которого все углы прямые.



Получается, что квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, прямоугольника и ромба.

Свойства (помимо свойств прямоугольника, ромба, параллелограмма)

- Все углы квадрата — прямые, все стороны квадрата — равны.
- Диагонали квадрата равны и пересекаются под прямым углом.
- Диагонали квадрата делят его углы пополам.

Площадь квадрата:

Теорема. Площадь квадрата равна квадрату его стороны. $S = \mathbf{a}^2$

Начнем с того случая, когда $a = 1/n$, где n является целым числом.

Возьмем квадрат со стороной 1 и разобьем его на n2 равных квадратов так, как показано на рисунке 1.

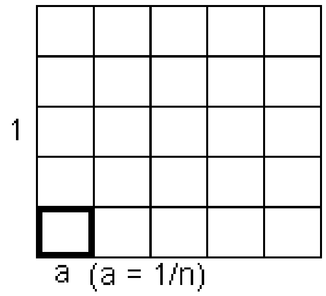


рис. 1

Так как площадь большого квадрата равна единице, то площадь каждого маленького квадрата равна 1/n2. Сторона каждого маленького квадрата равна 1/n, т. е. равна a. Итак,

S = 1/n2 = (1/n)2 = a2.   (1)

Пусть теперь число a представляет собой конечную десятичную дробь, содержащую n знаков после запятой (в частности, число a может бать целым, и тогда n = 0). Тогда число m = a · 10n целое. Разобьем данный квадрат со стороной a на m2 равных квадратов так, как показано на рисунке 2.

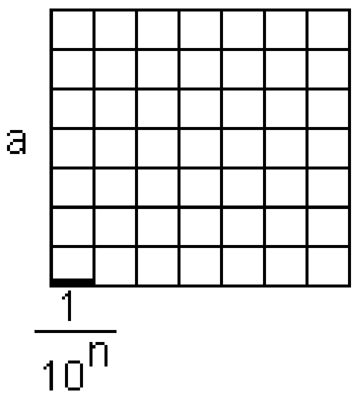


рис. 2

При этом каждая сторона данного квадрата разобьется на m равных частей, и, значит, сторона любого маленького квадрата равна

$a/m = a / (a \cdot 10n) = 1/10n.$

По формуле (1) площадь маленького квадрата равна $(1/10n)2$. Следовательно, площадь S данного квадрата равна

$m2 \cdot (1/10n)2 = (m/10n)2 = ((a \cdot 10n)/10n)2 = a2.$

Наконец, пусть число a представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим число an, получаемое из a отбрасыванием всех десятичных знаков после запятой, начиная с $(n + 1)$-го. Так как число a отличается от an не более чем на $1/10n$, то $an \le a \le an + 1/10n$, откуда

$an2 \le a2 \le (an + 1/10n)2. \quad (2)$

Ясно, что площадь S данного квадрата заключена между площадью квадрата со стороной an и площадью квадрата со стороной $an + 1/10n$:

т. е. между $an2$ и $(an + 1/10n)2$:

$an2 \le S \le (an + 1/10n)2. \quad (3)$

Будем неограниченно увеличивать число n. Тогда число $1/10n$ будет становиться сколь угодно малым, и, значит, число $(an + 1/10n)2$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $an2$. Поэтому из неравенств (2) и (3) следует, что число S сколь угодно мало отличается от числа a2. Следовательно, эти числа равны: $S = a2$, что и требовалось доказать.