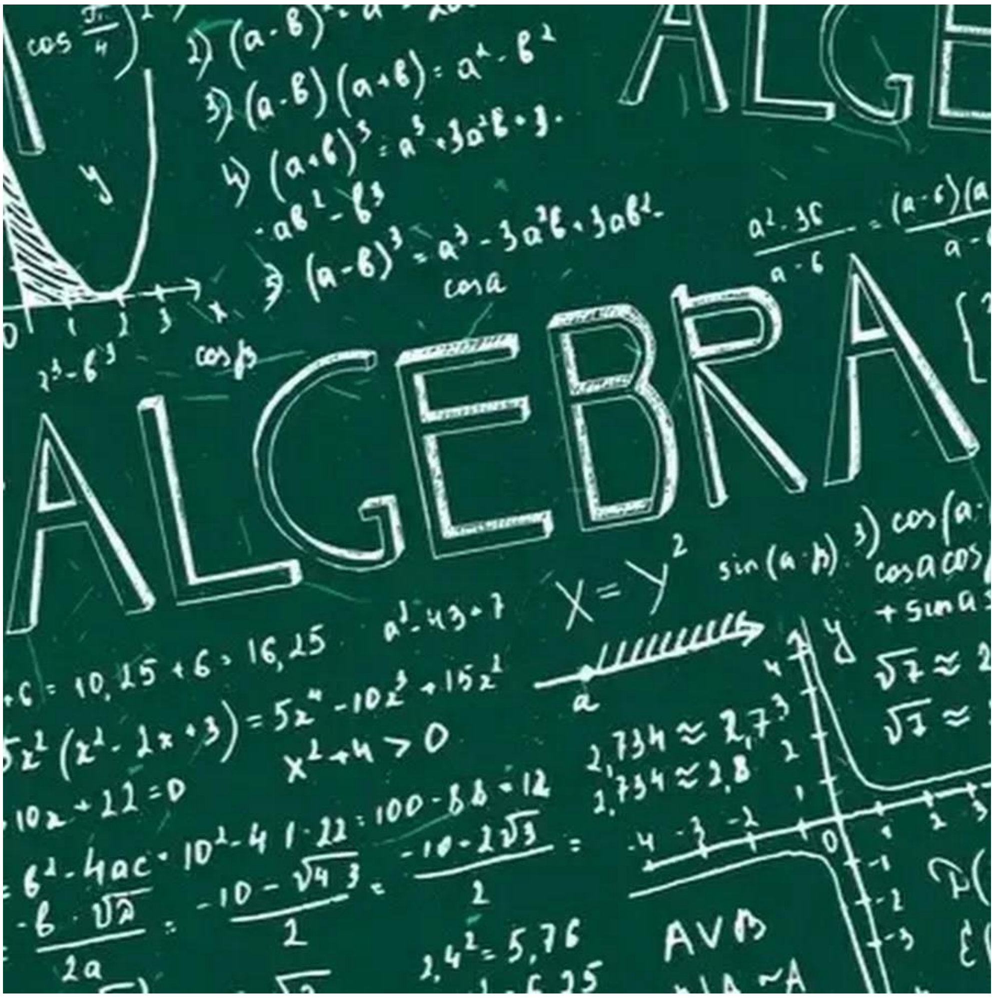

Алгебраические дроби

АЛГЕБРА

Суворова Екатерина Александровна | ноябрь 2020

Оглавление

Алгебраическая дробь. Сокращение дробей

Алгебраической называют дробь, в числителе и (или) знаменателе которой стоят алгебраические выражения.

Если в эти выражения вместо букв подставить их числовые значения, то в числителе и знаменателе алгебраической дроби получатся числа, и дробь превратится в обыкновенную. А раз так, то алгебраическая дробь обладает всеми свойствами обыкновенной дроби, в частности **основным свойством дроби**:

Величина дроби не изменится, если её числитель и знаменатель одновременно умножить или разделить на одно и то же число или алгебраическое выражение, не равное нулю.

Последовательность действий:

1. сократить коэффициенты;
2. перебрать по очереди все буквы, деля числитель и знаменатель на букву в наименьшей степени.

Алгебраические выражения в числителе и знаменателе разложим на множители, полученную дробь сократим:

а) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)\cdot(a+b)}=\dfrac{(a+b)\cdot\cancel{(a+b)}^{1}}{(a-b)\cdot\cancel{(a+b)}_{1}}=\dfrac{a+b}{a-b}.$

Или кратко:

зачеркнув показатель, мы показываем, что вместо $(a+b)^2$ останется $(a+b)$

$\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{(a+b)^{\cancel{2}}}{(a-b)\cdot\cancel{(a+b)}_{1}}=\dfrac{a+b}{a-b}.$

Сложение и вычитание алгебраических дробей

Вы знаете правило сложения обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями. Это правило можно выразить таким равенством:

$$\boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}}$$

По такому же правилу складывают алгебраические дроби с одинаковым знаменателем.

Сложение дробей с одинаковыми знаменателями.

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.

$$\frac{3a-7b}{15ab}+\frac{2a+2b}{15ab}=\frac{3a-7b+2a+2b}{15ab}=\frac{5a-5b}{15ab}=\frac{5(a-b)}{15ab}=\frac{a-b}{3ab}.$$

Сложение дробей с разными знаменателями.

Используя основное свойство дроби, можно сложение дроби с разными знаменателями привести до сложения с одинаковыми знаменателями.

Чтобы сложить дроби с разными знаменателями, надо привести их к общему знаменателю, сложить числители и результат разделить на их общий знаменатель.

Алгоритм:

1. Найти наименьший общий знаменатель дробей.

2. Найти дополнительные множители для каждой из дробей (поделив общий знаменатель на знаменатель данной дроби).

3. Домножить числители и знаменатели на соответствующие дополнительные множители.

4. Сложить или вычесть дроби, пользуясь правилами сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Пусть требуется сложить дроби

$$\frac{A}{B} \text{ и } \frac{C}{D}.$$

Приведём эти дроби к общему знаменателю bd. Для этого числитель и знаменатель первой дроби умножим на d, а числитель и знаменатель второй дроби умножим на b. Получим:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times D}{B \times D}; \quad \frac{C}{D} = \frac{C \times B}{D \times B}.$$

Теперь можно воспользоваться правилом сложения дробей с одинаковыми знаменателями:

$$= \frac{A \times D + C \times B}{B \times D}.$$

Тут за общий знаменатель выбрано выражение, которое равно произведению знаменателю данных дробей. Отметим, что произведение знаменателей данных дробей не всегда будет наибольшим общим делителем знаменателя.

При сложении дробей с разными знаменателями часто удаётся найти более простой общий знаменатель, чем произведение знаменателей.

Так как целое алгебраическое выражение можно рассматривать как алгебраическую дробь со знаменателем 1, пользуясь изложенными правилами, можно складывать также алгебраические дроби и целые выражения.

$$a - b + \frac{b^2}{a+b} =$$

$$\frac{a-b}{1} + \frac{b^2}{a+b} =$$

$$\frac{a^2-b^2+b^2}{a+b} = \frac{a^2}{a+b}.$$

Помните, что сумма двух алгебраических дробей есть алгебраическая дробь.

Вычитание дробей с одинаковым знаменателем

Вы знаете правило отнимания обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями. Это правило можно выразить таким равенством:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

По такому же правилу вычитают алгебраические дроби с одинаковым знаменателем.

Чтобы вычесть алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями, надо вычесть их числители, а знаменатель оставить тот же самый.

Пример:

не забудьте про скобки

$$\frac{a+d}{2c}-\frac{a-b}{2c}=\frac{a+d-(a-b)}{2c}=$$

$$=\frac{a+d-a+b}{2c}=\frac{a-a+d+b}{2c}=\frac{d+b}{2c}$$

Вычитание дробей с разными знаменателями

Используя основное свойство дроби, можно вычитание дроби с разными знаменателями привести до вычитания с одинаковыми знаменателями.

$$\frac{a-1}{a^2+2a+1}-\frac{a+1}{a^2-2a+1}-\frac{1}{a^2-1}=$$

$$\frac{(a-1)(a-1)^2}{(a-1)^2(a+1)^2}-\frac{(a+1)(a+1)^2}{(a-1)^2(a+1)^2}-\frac{(a-1)(a+1)}{(a-1)^2(a+1)^2}$$

$$=\frac{(a-1)^3-(a+1)^3-(a^2-1)}{(a^2-1)^2}=$$

$$\frac{(a^3-3a^2+3a-1)-(a^3+3a^2+3a+1)-(a^2-1)}{(a^2-1)^2}=$$

$$\frac{a^3-3a^2+3a-1-a^3-3a^2-3a-1-a^2+1}{(a^2-1)^2}=\frac{-7a^2-1}{(a^2-1)^2}.$$

$$\frac{2c}{3x}+\frac{1}{a}-\frac{3a}{2x}=$$

$$\frac{4ac}{6ax}+\frac{6x}{6ax}-\frac{9a^2}{6ax}$$

$$=\frac{4ac+6x-9a^2}{6ax}.$$

Умножение и деление алгебраических дробей

Умножение

Вы знаете правила умножения обыкновенных дробей. Их можно выразить таким равенством:

По таким же правилам выполняют умножение алгебраических дробей.

Чтобы перемножить алгебраические дроби, надо перемножить отдельно их числители и знаменатели и первое произведение записать числителем, а второе знаменателем.

$$\frac{3p^2mq}{2a^2b^2} \times \frac{3abc}{8pq} = \frac{3p^2mq \cdot 3abc}{2a^2b^2 \cdot 8pq} = \frac{9pmc}{16ab}.$$

При умножении дробей с многочленными числителями и знаменателями их числители и знаменатели разлагают на множители и сокращают, если это возможно.

$$\frac{x^2-4y^2}{x^2-xy} \times \frac{x-y}{x^2+2xy} =$$

$$\frac{(x-2y)(x+2y)}{x(x-y)} \times \frac{x-y}{x(x+2y)} =$$

$$\frac{(x-2y)(x+2y)(x-y)}{x(x-y)x(x+2y)} = \frac{x-2y}{x^2}.$$

Пользуясь правилом умножения алгебраических дробей, можно также умножить алгебраическую дробь на целое выражение, и наоборот (целое выражение можно рассматривать как алгебраическую дробь со знаменателем 1).

Деление

Вы знаете правила деления обыкновенных дробей. Их можно выразить таким равенством:

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}}$$

По таким же правилам выполняют деление алгебраических дробей.

Чтобы разделить дробь на дробь, надо делимое умножить на дробь, обратную делителю.

$$\frac{8b^2cd}{9a^5} : \frac{7cd}{12a^3} = \frac{8b^2cd}{9a^5} \times \frac{12a^3}{7cd}$$
$$= \frac{8b^2cd \times 12a^3}{9a^5 \times 7cd} = \frac{32b^2}{21a^2}.$$

При делении дробей с многочленными числителями и знаменателями их числители и знаменатели разлагают на множители и сокращают, если это возможно.

$$\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} : \frac{4a-4b}{3a+3b} =$$
$$\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2} : \frac{4(a-b)}{3(a+b)} =$$
$$\frac{(a-b)(a+b)\times 3(a+b)}{(a+b)^2 \times 4(a-b)} = \frac{3}{4}.$$

Возведение в степень алгебраических дробей

Для того чтобы выполнить возведение обыкновенной дроби в степень с натуральным показателем, мы возводим в эту степень числитель и знаменатель дроби:А как поступить, если нужно возвести в степень алгебраическую дробь?

Возведение алгебраических дробей в степень осуществляется таким же образом, как и возведение обыкновенных дробей в степень.

Чтобы возвести алгебраическую дробь в какую-нибудь степень, надо возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель и первый результат разделить на второй.

$$\boxed{\left(\frac{a}{3x^2}\right)^4 = \frac{a^4}{(3x^2)^4} = \frac{a^4}{81x^8}.}$$

$$\boxed{\left(\frac{a-1}{a+c}\right)^3 = \frac{(a-1)^3}{(a+c)^3}.}$$