**Занятие 3.**

**Симметрия, периодичность**

Перейдём к задачам, в которых существенную роль играет какая-либо симметрия графика функции или её периодичность.



**Пример 1.** Решите уравнение f ($\sqrt{х+4}$)= f(2x), где f(t) = 2t−t2 при всех действительных t.

**Решение**. Парабола y = 2t−t**2** симметрична относительно прямой t = 1 (прямой проходящей через вершину параболы и параллельной оси ординат), поэтому значения этой функции в точках t1 и t2 могут совпадать в двух случаях — если эти точки или совпадают, или симметричны относительно точки t = 1:

f(t1) = f(t2) , что равносильно, t1=t2 или (t1 + t2)/ 2= 1. Таким образом, имеем:

 f ($\sqrt{х+4}$)= f(2x)) ,то есть, $\sqrt{х+4}$= 2x или $\sqrt{х+4}$+ 2x = 2. (1)

 Первое уравнение полученной совокупности равносильно системе

$\left\{\begin{array}{c}x + 4 = 4x^{2},\\х\geq 0.\end{array}\right.$

Решив которую , получим x = $\frac{1 +\sqrt{65} .}{8} $Второе же уравнение совокупности (1) имеет корень x = 0, который является единственным, так как левая часть уравнения есть функция, монотонно возрастающая на своей области определения.

 Ответ: 0, $\frac{1 +\sqrt{65} .}{8}$ .

**Пример 2** .Решить уравнение

(2x + 1)(2 +$\sqrt{\left(2x + 1)^{2} + 3\right)}$)+ 3x $\sqrt{\left(зх)^{2} + 3\right)}$ =0.

**Решение**.

Данное уравнение имеет вид f(2x + 1) + f(3x) = 0, (2)

где f(t) = t(2+ $\sqrt{t^{2}+3}$). Функция f определена на всей числовой прямой и является нечётной: f(−t) = −f(t). При t > 0 функция f монотонно возрастает, будучи произведением двух монотонно возрастающих функций y = t и y = 2+$\sqrt{t^{2}+3}$ , принимающих только положительные значения. Ввиду своей нечётности функция f монотонно возрастает поэтому и при t < 0. Пусть для чисел a и b выполнено равенство f(a)+f(b) = 0, то есть f(b) = −f(a). Поскольку f (−a) = −f(a), имеем f(b) = f(−a), что ввиду монотонности функции f эквивалентно b = −a или a + b = 0. Таким образом, уравнение (2) равносильно уравнению

2x + 1 + 3x = 0 , откуда х=$-\frac{1}{5}$ .

 Ответ: $-\frac{1}{5}$.

**Пример 3** Пусть f(x) —периодическая функция с периодом 8, такая, что

 f(x) = 8x−x2 при x ∈ [0;8].

Решите уравнение f(2x + 16) + 23 = 5f(x). (3)

**Решение.**

Обе части уравнения (3) являются функциями, периодическими с периодом 8 (левая часть периодична даже с периодом 4, но это не важно).

 В силу указанной периодичности множество корней этого уравнения (если оно непустое) распадается на серии, в каждой из которых любые два корня отличаются на целое число, кратное 8. Значит, нам достаточно найти корни уравнения (3) на отрезке [0;8], после чего все корни найдутся путём прибавления к найденным значениям слагаемого 8n, n ∈Z.

Обозначим t = 2x + 16. Имеем два различных случая расположения переменной x на рассматриваемом отрезке [0;8].

1. Если x ∈ E1 = [0;4], то t ∈ [16;24], и тогда

 f(2x + 16) = f(t) = 8(t−16)−(t−16)2 = 8·2x−(2x)2 = 16x−4x2. Последнее равенство получилось, когда вместо t поставили выражение , которое оно заменяет t = 2x + 16

Уравнение (3) принимает вид

16x−4x2 + 23 = 5(8x−x2) ⇔ x2 −24x + 23 = 0 ⇔ x1 = 1, x2 = 23. Множеству E1 принадлежит только x = 1.

1. Если x ∈ E2 = [4;8], то t ∈ [24;32], и тогда

f(2x + 16) = f(t) = 8(t−24)−(t−24)2 = 8(2x−8)−(2x−8)2 = −4x2 + 48x−128. Теперь уравнение (3) принимает вид

−4x2 + 48x−128 + 23 = 5(8x−x2) ;

 x2 + 8x−105 = 0 ;

x1 = 7, x2 = −15.

 Множеству E2 принадлежит только x = 7.

Итак, на отрезке [0;8] уравнение (3) имеет два корня: x = 1 и x = 7. Следовательно, множество всех корней данного уравнения состоит из двух серий: 1 + 8n и 7 + 8n, n ∈Z.

 **Ответ:** 1 + 8n, 7 + 8n, n ∈Z.

Пример 4.

Найти все значения параметра *а*, при которых уравнение

Х2- 2а sin(cosx)+a2=0

Имеет единственное решение.

**Решение.**

Заметим, что функции у=х2 и у=sin(cos x)- четные функции, поэтому левая часть уравнения есть четная функция. Значит , если х0 решение уравнения, то и (-х0) – тоже решение уравнения (выявлена симметрия!). Таким образом, чтобы х0 было единственным решением уравнения необходимо, чтобы х0 и (-х0) совпадали, то есть х0=0. Отберем возможные значения параметра *а*, потребовав , чтобы х=0 было корнем уравнения.

02- 2а sin(cos0)+a2=0,

-2аsin1+a2=0, откуда а=0 или а=2sin1.

Осталось проверить, все ли найденные значения а удовлетворяют условию задачи.

Сделаем подстановку.

Если а=0, то исходной уравнение Х2- 2а sin(cosx)+a2=0 примет вид

Х2- 2$∙0∙$ sin(cosx)+02=0,

Х2=0, х=0 – единственный корень уравнения.

Если а=2sin1,то получим уравнение Х2- 2$∙2sin1∙$ sin(cosx)+(2sin1)2=0.

То есть х2+4sin21=4$sin1∙$ sin(cosx). Очевидно,что

4$sin1∙$ sin(cosx)$\leq $4sin21. (заметить нужно лишь, |sin(cosx)|$ \leq 1$).

Но х2+4sin21$\geq $4sin21, то последнее уравнение равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{c}x^{2}+4sin^{2}1=4sin^{2}1;\\4sin^{2}1=4sin1∙ sin\left(cosx\right).\end{array}\right.$$

Что дает нам

 $\left\{\begin{array}{c}х=0;\\sin\left(cosx\right)=1.\end{array}\right.$ При х=0 система верна, значит и здесь х=0 – единственный корень уравнения.

$Ответ$: а=0; а=2sin1.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Решите уравнение f($\sqrt{(x + 9)}$= f(3x), где f(t) = 3t−t2 при всех действительных t.
2. Решить уравнение (2x + 1)(1 +( $\sqrt{(2x + 1)^{2}+7}$ )+ x(1 +$\sqrt{х^{2}+7}$ )= 0.
3. Пусть f(x)- периодическая функция с периодом 3 такая, что

f(x)=x2, $0\leq х<3$.

Решите уравнение: f(2x+6)+3f(x)=9.

1. При каких значениях параметра а система имеет единственное решение

$\left\{\begin{array}{c}ax^{2}+4ax-y+7a+1=0;\\ay^{2}-x-2ay+4a-2=0.\&\end{array}\right.$  ?

**Домашняя олимпиада**

1. Три сестры пришли на рынок и продавали поштучно цыплят. Первая принесла 12 цыплят, вторая – 18, третья – 32 цыпленка. Каждая из них часть товара продала утром, а часть – вечером. Утренняя цена одного цыпленка была у всех сестёр одинаковая, и вечерняя цена тоже одинаковая, но более низкая (положительная). К вечеру весь товар был распродан, и дневная выручка (за утро и вечер) у всех сестёр оказалась одинаковой: 1700 руб. Найдите суммарную вечернюю выручку (в рублях) всех сестёр.
2. Найдите сумму корней уравнения

 cos2 𝑥 + cos2 3𝑥 − 2cos𝑥 ∙ cos2𝑥 ∙ cos3𝑥 = sin2 4𝑥, принадлежащих отрезку [𝜋;2𝜋]. В ответе укажите целое число, ближайшее к найденной сумме.

1. Найдите сумму всех двузначных чисел, у каждого из которых сумма квадратов цифр на 37 больше произведения цифр.
2. В подземелье у гномов в один ряд стоят 2016 сундуков с сокровищами: некоторые из них закрыты, некоторые – открыты. Гном по имени Открывай проходит вдоль ряда и открывает каждый сундук, который до этого был закрыт, Затем гном по имени Закрывай подходит к каждому второму сундуку и, если он открыт, закрывает его. Потом гном Открывай подходит к каждому третьему сундуку и, если он закрыт, открывает его. Затем гном Закрывай подходит к каждому четвертому сундуку и, если он открыт, закрывает его, и так далее. Всего гномы Закрывай и Открывай сделали 2016 проходов вдоль ряда. Сколько сундуков окажутся после всего этого закрытыми?

**Решение задач для самостоятельного решения**

1. **Решение**. Парабола y = 3t−t**2** симметрична относительно прямой t = 1,5 (прямой проходящей через вершину параболы и параллельной оси ординат), поэтому значения этой функции в точках t1 и t2 могут совпадать в двух случаях — если эти точки или совпадают, или симметричны относительно точки t = 1,5:

f(t1) = f(t2) , что равносильно, t1=t2 или (t1 + t2)/ 2= 1,5. Таким образом, имеем:

 f ($\sqrt{х+9}$)= f(3x)) ,то есть, $\sqrt{х+9}$= 3x или $\sqrt{х+9}$+ 3x = 3. (1)

 Первое уравнение полученной совокупности равносильно системе

$\left\{\begin{array}{c}x + 9 = 9x^{2},\\х\geq 0.\end{array}\right.$ Первое уравнение примет вид 9х2-х-9 =0 , откуда с учетом того, что $х\geq 0$ , получим x = $\frac{1 +\sqrt{325} .}{18}$

Второе же уравнение совокупности (1) имеет корень x = 0, который является единственным, так как левая часть уравнения есть функция, монотонно возрастающая на своей области определения.

 Ответ: 0, $\frac{1 +\sqrt{325} .}{18}$ .

1. Данное уравнение имеет вид f(2x + 1) + f(x) = 0, (2)

где f(t) = t(1+ $\sqrt{t^{2}+7}$ Функция f определена на всей числовой прямой и является нечётной: f(−t) = −f(t). При t > 0 функция f монотонно возрастает, будучи произведением двух монотонно возрастающих функций y = t и

 y = 2+$\sqrt{t^{2}+7}$ , принимающих только положительные значения. Ввиду своей нечётности функция f монотонно возрастает поэтому и при t < 0. Пусть для чисел a и b выполнено равенство f(a)+f(b) = 0, то есть f(b) = −f(a). Поскольку f (−a) = −f(a), имеем f(b) = f(−a), что ввиду монотонности функции f эквивалентно b = −a или a + b = 0. Таким образом, уравнение (2) равносильно уравнению

2x + 1 + x = 0 , откуда х=-1/3 .

 Ответ: -1/3.

1. **Решение**

Т.к. 3 - период функции f(x), то f(2x+6)=f(2x+3)=f(2x) , тогда уравнение примет вид f(2x)+3f(x)=9, рассмотрим два случая.

1) пусть $\left\{\begin{array}{c}0\leq x<3\\0\leq 2x<3\end{array}\right.$, т.е. $0\leq x<\frac{3}{2}$, тогда уравнение f(2x)+3f(x)=9 примет вид:

 $\left\{\begin{array}{c}4x^{2}+3x^{2}-9=0;\\0\leq x<\frac{3}{2}.\end{array}\right.$

Х2 =$ \frac{9}{7}$, х=$\pm \frac{3}{\sqrt{7}}$. С учетом второго условия системы, получим х=$\frac{3}{\sqrt{7}}$ и значит х1 = $\frac{3}{\sqrt{7}}+3n, n\in Z$

2) пусть$\left\{\begin{array}{c}0\leq x<3\\3\leq 2x<6\end{array}\right.,$ то$ \frac{3}{2}\leq x<3$  , тогда $0\leq 2x-3<3$  уравнение примет вид:

$\left\{\begin{array}{c}(2x-3)^{2}+3x^{2}-9=0,\\\frac{3}{2}\leq x<3\end{array}\right.$;

$\left\{\begin{array}{c}7x^{2}-12х=0\\\frac{3}{2}\leq x<3\end{array}\right.$;

$\left\{\begin{array}{c}х=0 или \frac{12}{7}\\\frac{3}{2}\leq x<3\end{array}\right.$. Откуда получаем, что х=$\frac{12}{7}$, то есть х2-$\frac{12}{7}+3n, n\in Z$

**Ответ:**$ \frac{3}{\sqrt{7}}+3n; \frac{12}{7}+3n, n\in Z$

**4. Решение**





**Решение задач домашней олимпиады.**

1. Ответ: 2100 руб.

**Решение**. Пусть первая, вторая и третья сестры продали утром x, y и z цыплят соответственно (𝑥,𝑦,𝑧 ∈ ℕ). Пусть также a и b – утренняя и вечерняя цены одного цыпленка соответственно (𝑎 > 𝑏 > 0). Так как дневная выручка (за утро и вечер) у всех сестёр одинакова и равна 1700 рублей, имеем

𝑎𝑥 + 𝑏(12 − 𝑥) = 1700,

𝑎𝑦 + 𝑏(18 − 𝑦) = 1700,

𝑎𝑧 + 𝑏(32 − 𝑧) = 1700,

откуда, вычитая эти равенства почленно, получим

(𝑎 − 𝑏)(𝑥 − 𝑦) = 6𝑏,

 (𝑎 − 𝑏)(𝑦 − 𝑧) = 14𝑏.

Поделив первое уравнение на второе, получим, что (𝑥−𝑦)/( 𝑦−𝑧) = 3/ 7 , то есть 𝑥 − 𝑦 = 3𝑘, 𝑦 − 𝑧 = 7𝑘. Откуда 𝑥 − 𝑧 = 10𝑘, 𝑘 ∈ ℕ.

Так как 𝑥 < 12, то из последнего соотношения найдём 𝑥 = 11,𝑧 = 1. Поэтому 𝑦 = 8.

Подстановка найденных значений x, y, z в первые два уравнения даёт 𝑎 = 150, 𝑏 = 50.

Общая вечерняя выручка равна

𝑏(12 − 𝑥) + 𝑏(18 − 𝑦) + 𝑏(32 − 𝑧) = 42𝑏 = 2100.

1. Ответ: 33.

**Решение**. Используя нетрудно доказываемое тождество

cos2 𝛼 + cos2(𝛼 + 𝛽) − 2cos𝛼 ∙ cos𝛽 ∙ cos(𝛼 + 𝛽) = sin2 𝛽 , преобразуем исходное уравнение к виду sin2 2𝑥 = sin2 4𝑥, откуда 𝑥 = 𝜋𝑛/ 6 , 𝑛 ∈ ℤ. На отрезке [𝜋;2𝜋] содержится семь корней; их сумма равна 21𝜋/ 2 .

1. Ответ: 231.

Решение. Для двузначного числа $\overbar{ав}$ условие означает, что

𝑎2 + 𝑏2 − 𝑎𝑏 = 37 ⟺ (2𝑎 − 𝑏)2 + 3𝑏2 = 148.

Тогда 𝑏 ≤ 7, и прямой перебор вариантов оставляет только три варианта: 𝑏 = 3, 𝑏 = 4, 𝑏 = 7. Таким образом, искомыми числами являются 37, 47, 73, 74.

1. Ответ: 1008.

 Решение. Ответить на вопрос задачи – это все равно, что посчитать количество четных чисел в наборе 1, 2, 3,…, 2016. Поскольку все нечетные сундуки после первого прохода были открытыми, гном Закрывай к ним не прикасается – они и останутся открытыми. А четные сундуки гном Закрывай, интересующийся только

 сундуками с четными номерами, все закроет, так как он их посетит последним.