**«Преобразование степеней и дробно-иррациональных выражений»**

**Теоретический справочник**

***Алгебраическое выражение F(x,y)*** – формула, содержащая числа, буквенные переменные, скобки а также знаки математических действий: сложения, вычитания, деления, извлечения корня, возведения в степень, логарифмирования.

Если в выражении имеются только числа, оно называется ***числовым,*** если же и буквенные переменные, то выражение с ***переменными*.** Значения аргументов, при которых выражение имеет смысл, называют ***допустимыми значениями***. Множество всех допустимых значений аргументов выражения называют его областью допустимых значений и обозначают **ОДЗ(*F*)**.

При определении области допустимых значений ОДЗ**(*F*)** исключают те значения аргументов, при которых:

* хотя бы один из имеющихся в выражении знаменателей обращается в нуль;
* выражение под корнем четной степени отрицательно;
* выражение под знаком логарифма отрицательно или основание логарифма равно 0 или 1;
* модуль аргумента выражения с обратными тригонометрическими функциями *arcsinx, arccosx* больше 1;
* тангенс и котангенс не определены;
* выражение в отрицательной нецелой степени не больше 0;
* не удовлетворяются условия задачи.

Можно области допустимых значений алгебраических выражений **ОДЗ(*F*)** описать так:

**Для рациональных выражений**



**Для иррациональных выражений**



**Для логарифмических выражений**



**Для обратных тригонометрических выражений**



**Для степенных выражений**



**Для тригонометрических выражений**



**Для решения текстовых задач**

длины отрезков, пройденный путь, время движения, скорость и ускорение движения и т. д. – величины положительные

***Корнем  выражения*** *F*(*x*) называют такое значение аргумента , при котором числовое значение этого выражения F () будет равняться 0. Нахождение корней выражения  *F* (*x*) сводится к решению уравнения *F* (*x*) = 0 относительно неизвестной *x.*

***Модуль числа***  равен самому числу, если оно неотрицательно, либо противоположному числу, если оно отрицательно, т. е.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Определение** | **Формулы** | |
|  | * ⏐*x*⏐ ≥ 0 | * ⏐*x - y*⏐ ≥ ⏐*x*⏐ - ⏐*y*⏐ |
| * ⏐-*x*⏐=⏐*x*⏐ | * ⏐*x ⋅ y*⏐ = ⏐*x*⏐ ⋅ ⏐*y*⏐ |
| * ⏐*x*⏐ ≥ *x* | * ⏐*x* : *y*⏐ =⏐*x*⏐ : ⏐*y*⏐ |
| * ⏐*x + y*⏐ ≤ ⏐*x*⏐ + ⏐*y*⏐ | * ⏐*x*⏐2 = *x*2 |

Выражение *ar* называется ***рациональной степенью числа* *a***, если .

***Арифметический корень целочисленной четной степени n*** из числа *a* определяется как некоторое ***неотрицательное*** число *b*, , *n*-ая степень которого равна *a.* Причем:

* при целом и четном значении *n*: 
* при целом нечетном значении *n*: 

***Иррациональное число*** представляет собой бесконечную ***непериодическую***десятичную дробь. Сравнить иррациональные числа можно:

* сравнивая их после освобождения от иррациональности;
* выстраивая цепочку неравенств с заменых иррациональных чисел их оценками;
* сведя к очевидному неравенству, при сравнении разнородных чисел.

***Тождественно равными*** называют два выражения, соответственные значения которых равны при любых значениях переменных.

***Тождественные преобразования*** многочленов и дробно-рациональных выражений:

* приведение подобных слагаемых;
* сокращение дробей;
* разложение разности степеней на произведение суммы и разности меньшей степени;
* разложение суммы и разности на сумму (разность) первых степеней;
* возведение в степень суммы и разности;
* разложение многочлена на множители с использованием его корней;
* выделение полного квадрата из трехчлена;
* понижение порядка многочлена путем замены аргумента.

***Нестандартные преобразования.***

* Использование формулы: 

Пример: 

* Использование формулы сокращенного умножения:

Пример:

(1 + *b*) (1 + *b*2) (1 + *b*4) (1 + *b*8) (1 + *b*16) = (1 – *b*) (1 + *b*) (1 + *b*2) (1 + *b*4) (1 + *b*8) (1 + *b*16): (1 – *b*) = (1 – *b*32): (1 – *b*)

* **Метод неопределенных коэффициентов:**

Пример: найти коэффициенты aи bиз тождества:

Решение:

Основные формулы

**Формулы действий с корнями для нечетной степени**













**Формулы действий с корнями для четной степени**













**Разложение на множители**







, где *x*1, *x*2, …, *xn* - корни многочлена

**Возведение в степень**

 







**Свойства рациональной степени числа**



для , причем





для ,

причем 



**Примеры заданий на преобразование степеней и достаточные знания свойств, необходимые для решения этих заданий.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Задания** | **Достаточные знания** | **Формула** |
|  | Свойство степени *an* c натуральным показателем |  |
|  | Свойства степени произведения |  |
|  | Свойства степени , основанием  которой является степень |  |
|  | Свойства степени арифметического  корня |  |
|  | Свойства арифметического корня с нечетным показателем  из степени с нечетным показателем |  |
|  | Свойства арифметического корня с четным показателем  из степени с четным показателем |  |
|  | Свойство модуля числа *a* |  |
|  | Свойства произведения корней  с одинаковыми показателями |  |
|  | Свойства степени  с дробным показателем |  |
|  | Свойства частного корней  с одинаковыми показателями |  |
|  | Свойства произведения степеней  с одинаковыми основаниями |  |
|  | Свойства степени  с отрицательным целым показателем |  |
|  | Свойства степени  с отрицательным дробным показателем |  |

**Примерное задание.** Найдите значение выражения 

**Решение:** 

*Для решения используем последовательно знания следующих свойств:*

* Свойство степени  с дробным показателем: ;
* Свойство степени *a n* c натуральным показателем: 
* Свойство арифметического корня  с четным показателем степени: ;
* Свойство произведения степеней с одинаковыми основаниями: ;
* Свойство модуля числа: 

**Примеры заданий на преобразование дробно-иррациональных выражений и достаточные знания, необходимые для решения этих заданий.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Задания** | **Достаточные знания** | **Формула** |
|  | Свойство степени , основанием которой является степень с дробным показателем |  |
|  | Формулы разложения на множители квадратного двучлена |  |
|  | Основное свойство дроби |  |
|  | Свойство степени корня |  |
|  | Свойство арифметического корня  из степени с четным показателем |  |

**Примерное задание.** Упростите выражение 

**Решение:** 



*Для решения используем последовательно знания следующих свойств:*

* Свойство степени  с основанием степени : .
* Формулы разложения на множители кубического двучлена : .
* Основное свойство дроби : .

**Практическая часть проекта**

**1.** Решение тестовых заданий по учебно-методическому пособию «Тематические тесты. Математика ЕГЭ-2008. Часть I (А1-А10, В1-В3) 10-11 классы» под редакцией Ф.Ф. Лысенко:

* А1. Понятие степени с рациональным показателем. Свойства степени с рациональным показателем (Варианты №1-№10).
* А2. Тождественные преобразования иррациональных выражений (Варианты №1-№10).

**2.** Решение тестовых заданий по учебно-методическому пособию «Тематические тесты. Математика ЕГЭ-2008. Часть II (В4-В8, С1-С2) 10-11 классы» под редакцией Ф.Ф. Лысенко:

* В6. Тождественные преобразования иррациональных выражений (Варианты №1-№10).
* В6. Тождественные преобразования выражений, содержащих степень (Варианты №1-№10).

**3.** Решение тестовых заданий по учебно-методическому пособию «Математика. Тренировочные тематические задания повышенной сложности с ответами для подготовки к ЕГЭ и к другим формам выпускного и вступительного экзаменов». Составители Г.И. Ковалева, Т.И. Бузулина, О.Л. Безрукова, Ю.А. Розка:

* 1.1. Преобразование степенных и дробно-иррациональных выражений. (Задания №1-№94 стр. 8-24).

**Тестовые задания для самостоятельного решения**

|  |
| --- |
| ***Степень: вычисление значений*** |
| **1.** Вычислите 1- 0,43 – (0,008)- 1/3 + (15,1)0 A) 5 B) -3 C) -4 D) -5 E) -2 |
| **2.** Вычислите:  A)  B) 4 C) 2 D)  E) 0,75 |
| **3.** Вычислите  A)  B)  C) 1 D) 0 E) |
| **4.** Вычислите  A) 0,1 B) 10 C) 1 D) 2 E) 0,01 |
| **5.** Вычислите  A) 1 B) 2 C)  D)  E) |
| **6.** Вычислите половину суммы 412 + 412 + 412 + 412A) 225 B) 224 C) 448 D) 2⋅416 E) 425 |
| **7.** Найдите  часть числа  A) 1 B) 3 C) 2 D) 9 E) 6 |
| **8.** Решите уравнение  A) - B) - C) - D) - E) - |
| **9.** Вычислите (2022 - 542 + 256352):(44102) A) 4 B) 1 C) 2 D) 5 E) 10 |
| ***Корень: преобразования и вычисления*** |
| **10.** Найдите наибольший общий делитель чисел .  A) 9 B) 10 C) 18 D) 12 E) 6 |
| **11.** Найдите разность между наименьшим общим кратным и наибольшим общим делителем чисел  и .  A) 54 B) 72 C) 154 D) 162 E) 172 |
| **12.** Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби  A)  B)  C)  D)  E) |
| **13.** Какие из приведенных выражений являются рациональными числами?  1)  2)  3)  4)  A) 1; 2 B) 1; 3 C) 1; 4 D) 1 E) 3; 4 |
| **14.** Упростите выражение:  A) 4 + 4 B) 4 - 4 C) 2 + 4 D) 4 E) 2 - 4 |
| **15.** Вычислите  A) 12 B) 14 C) 18 D) 16 E) 15 |
| **16.** Вычислите значение выражения  при  A)  B)  C) 1 D) 0 E) |
| **17.** Вычислите  A) 17 B) 16 C) 20 D) 17 E) 25 |
| ***Корень: выделение полного квадрата*** |
| **18.** Найдите значение выражения  A) 1 B)  C)  D) 2 E) |
| **19.** Вычислить:  A) 2 B)  C) 2 D)  E) ответ отличен от указанных |
| **20.** Упростите:  A)  B)  C)  D)  E) |
| **21.** Упростите выражение:  A) 7 B)  C)  D)  E) |
| **22.** Упростите:  A) 4 + 1 B) 2 + 2 C) 4 + 2 D) 3 + 2 E) 2 + 1 |
| **23.** Вычислите  A) +1 B) -1 C) 12 D) (-1)-1 E) 2 |
| **24.** Укажите верное равенство, если a> *0*, b> *0* и c <0.  A) =  B) =  C) = -  D) =  E) = |
| **25.** Чему равно значение , если a> *0*, *b*> *0* и c <0?  A) *a|bc|* B) -*abc* C) *ab|c|* D) *|abc|* E) *abc* |
| **26.** Какое соотношение верно для чисел  и  A) *c* < *d* B) *c* > *d* C) *c* + 1 = *d* D) *c* = *d* E) |
| **27.** Сравнить числа: и  A) *a* > *b* B) *a* < *b* C) *a* = *b* D) *a* = *b* + 1E) *a* = *b* - 1 |
| **28.** Расположите в порядке убывания числа  A) *a* > *b* > *c* B) *c* > *b* > *a* C) *a* > *c* > *b* D) *c* > *a* > *b* E) *b* > *a* > *c* |
| **29.** Указать наибольшее число:  A)  B)  C)  D) 4 E) |
| **30.** Вычислите: , где [a] - целая часть числа a.  A) 15 B) 19 C) 18 D) 17 E) 21 |