**Метод математической индукции на уроках математики**

*«Разве ты не заметил*,*что способный к математике*

*изощрен во всех науках в природе?»*

Древнегреческий философ Платон

Одной из отличительных черт математики является дедуктивное построение теории. Но дедукция не является единственным методом научного мышления. В экспериментальных науках велика роль индуктивных выводов. В математике индукция часто позволяет угадать формулировку теорем, а в ряде случаев и наметить пути доказательств.

Слово индукция по-русски означает наведение, а индуктивными называют выводы, сделанные на основе наблюдений, опытов, т.е. полученные путем заключения от частного к общему.

Метод математической индукции можно сравнить с прогрессом. Мы начинаем с низшего, в результате логического мышления приходим к высшему. Человек всегда стремился к прогрессу, к умению развивать свою мысль логически, а значит, сама природа предначертала ему размышлять индуктивно.

В математике уже издавна используется индуктивный метод, основанный на том, что то или иное общее утверждение делается на основании рассмотрения  лишь нескольких частных случаев. История, например, сохранила следующее высказывание Эйлера: « У меня нет для доказательства никаких других доводов, за исключением длинной индукции, которую я провел так далеко, что никоим образом не могу сомневаться в законе, управляющем образованием этих членов… И кажется невозможным, чтобы закон, который, как было обнаружено, выполняется, например, для 20 членов, нельзя было бы наблюдать и для следующих».

**Аксиома математической индукции**

Утверждение, зависящее от натурального числа n, справедливо для

любого n, если выполнены два условия:

 А) Утверждение справедливо при n=1;

Б) При любом натуральном значении k из справедливости утверждения

n=k вытекает его справедливость и для n=k+1.

Доказательство по методу математической индукции проводится по

следующему**алгоритму (он состоит из четырех этапов):**

**1.база**( показываем, что доказываемое утверждение верно для некоторых простейших частных случаев ( **п**= 1));

**2.предположение**(предполагаем, что утверждение доказано для первых **к**случаев);

 **3**.**шаг**( в этом предположении доказываем утверждение для случая **п= к + 1);**

 **4.вывод ( у**тверждение верно для всех случаев, то есть для всех **п)**.

Заметим, что Методом математической индукции можно решать не все задачи, а только задачи, параметризованные некоторой переменной. Эта переменная называется переменной индукции.

**Применение метода математической индукции**

Применим всю данную теорию на практике и выясним, в каких задачах применяется данный метод.

**1.Метод математической индукции в решении задач на делимость**

 С помощью метода математической индукции можно доказывать различные утверждения, касающиеся делимости натуральных чисел.

Следующее утверждение можно сравнительно просто доказать. Покажем, как оно получается с помощью метода математической индукции.

Пример:

 Если n – натуральное число, то число ![[image]]() четное.

Решение:

При n=1 наше утверждение истинно: ![[image]]()- четное число. Предположим, что ![[image]]() - четное число. Так как ![[image]](), a 2k – четное число, то и ![[image]]()четное. Итак, четность ![[image]]() доказана при n=1, из четности ![[image]]() выведена четность ![[image]]().Значит, ![[image]]() четно при всех натуральных значениях n.

**2. Метод математической индукции в решении задач на доказательство тождеств**

**Пример:**

Доказать, что для любого натурального n справедливо равенство:$ $

$$1^{3}+2^{3}+3^{3}+…+=\frac{n^{2}\left(n+1\right)^{2}}{4}$$

Решение:

1.Мы видим, что при n=1 $$1^{3}=\frac{1^{2}\left(1+1\right)^{2}}{4}$$

утверждение верно.

2. Предположим, что равенство верно при n=k

$$x\_{k}=\frac{k^{2}\left(k+1\right)^{2}}{4}$$

3. Докажем истинность этого утверждения для n=k+1,

$$x\_{k+1}=\frac{\left(k+1\right)^{2}\left(k+2\right)^{2}}{4}$$

$x\_{k+1}=1^{3}+2^{3 }+k^{3}+\left(k+1\right)^{3} =\frac{k^{2}\left(k+1\right)^{2}}{4}+\left(k+1\right)^{3}$=$\frac{k^{2}\left(k+1\right)^{2}+4\left(k+1\right)^{3}}{4}=\frac{\left(k+1\right)^{2}\left(k^{2}+4k+4\right)^{}}{4}=\frac{\left(k+1\right)^{2 }\left(k+2\right)^{2}}{4}$

Из приведённого доказательства видно, что утверждение верно при n=k+1, следовательно, равенство верно при любом натуральном n.

**3**. **Метод математической индукции в решении задач на суммирование рядов**

Пример:

Доказать формулу

![[image]](), n – натуральное число.

Решение:

При n=1 обе части равенства обращаются в единицу и, следовательно, первое условие принципа математической индукции выполнено.

Предположим, что формула верна при n=k, т.е.

![[image]]().

Прибавим к обеим частям этого равенства ![[image]]() и преобразуем правую часть. Тогда получим

![[image]]()

Таким образом, из того, что формула верна при n=k, следует, что она верна и при n=k+1. Это утверждение справедливо при любом натуральном значении k. Итак, второе условие принципа математической индукции тоже выполнено. Формула доказана.

Пример:

 Доказать, что сумма n первых чисел натурального ряда равна ![[image]]().

Решение:

Обозначим искомую сумму ![[image]](), т.е. ![[image]]().

При n=1 гипотеза верна.

Пусть ![[image]](). Покажем, что ![[image]]().

В самом деле,

![[image]]().

Задача решена.

**4. Метод математической индукции в решении задач на доказательство неравенств**

Пример :

 Доказать, что при любом натуральном n>1

![[image]]().

Решение:

Обозначим левую часть неравенства через ![[image]]().

![[image]](), следовательно, при n=2 неравенство справедливо.

Пусть ![[image]]() при некотором k. Докажем, что тогда и ![[image]](). Имеем ![[image]](), ![[image]]().

Сравнивая ![[image]]() и ![[image]](), имеем ![[image]](), т.е. ![[image]]().

При любом натуральном k правая часть последнего равенства положительна. Поэтому ![[image]](). Но ![[image]](), значит, и ![[image]]().

**5. Метод математической индукции в решении геометрических**

**задач**

Наиболее естественное применение метода математической индукции в геометрии, близкое к использованию этого метода в теории чисел и в алгебре, - это применение к решению геометрических задач на вычисление

Пример:

  Вычислить сторону ![[image]]() правильного ![[image]]()- угольника, вписанного в круг радиуса R.

Решение:

При n=2 правильный 2n – угольник есть квадрат; его сторона ![[image]](). Далее, согласно формуле удвоения

![[image]]()

находим, что сторона правильного восьмиугольника ![[image]](), сторона правильного шестнадцатиугольника ![[image]](), сторона правильного тридцатидвухугольника ![[image]](). Можно предположить поэтому, что сторона правильного вписанного 2n – угольника при любом ![[image]]() равна

![[image]](). (1)

Допустим, что сторона правильного вписанного ![[image]]()- угольника выражается формулой (1). В таком случае по формуле удвоения

![[image]](),

откуда следует, что формула (1) справедлива при всех n.

Метод математической индукции является одной из теоретических основ при решении задач на суммирование, доказательстве тождеств, доказательстве и решении неравенств, решении вопроса делимости, при изучении свойств числовых последовательностей, при решении геометрических задач и т. д.